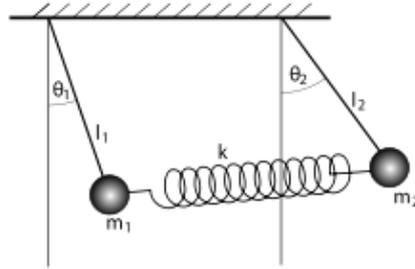


Experiment (5 P)

Erläutern Sie den Versuch und erklären Sie warum in gekoppelter Pendel die symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungsmoden einer rein harmonischen Bewegung entsprechen.



Als gekoppelte Pendel werden Pendel bezeichnet, zwischen denen ein Energieaustausch (beispielsweise durch eine Schraubenfeder) stattfinden kann. Betrachten wir als Modell den Fall zweier gleicher Pendel, die durch eine Feder miteinander verbunden sind. Dann werden aufgrund des Drehmomentes, verursacht durch die Schwerkraft und des entgegengesetzt wirkenden Momentes der Feder, die beiden Pendel in eine neue Gleichgewichtslage ausgelenkt. Für kleine Auslenkungen kann die Kleinwinkelnäherung angewendet werden. Werden nur Terme bis zur 1. Ordnung berücksichtigt, $\sin \theta_i \simeq \theta_i$ und $\cos \theta_i \simeq 1$, erhält man so zwei gekoppelte Bewegungsgleichungen. Die Kopplung kann man eliminieren durch die Summe und Differenz der gekoppelte Gleichungen und somit die Normalschwingungen in der Form $\tilde{\theta}_i(t) = a_i \cos(\omega_i t + \beta_i)$ erhalten.

Die Lösung der Normalschwingungsanalyse gibt $\theta_1 \propto (\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2)$ und $\theta_2 \propto (\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2)$. Die Variablen a_1 und a_2 kann man mit der nachstehenden Grafik diskutieren.

Bild 1 zeigt den Fall, dass $a_2 = 0$. Die beiden Pendel schwingen mit gleicher Amplitude und gleicher Phase (symmetrische Schwingung).

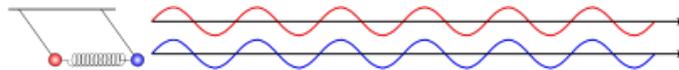


Bild 2 zeigt den Fall, dass $a_1 = 0$. Die beiden Pendel schwingen mit gleich großer Amplitude aber in Gegenphase (antisymmetrische Schwingung).

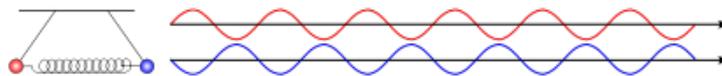
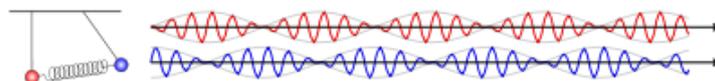


Bild 3 zeigt den Fall, dass $a_1 \neq a_2 \neq 0$. Wird zu Beginn nur eines der beiden Pendel aus seiner Ausgangslage ausgelenkt, so wandert die Schwingungsenergie langsam zwischen den beiden Pendeln hin und her.



Kurzfragen (25 P)

- Nennen Sie das 2. Newtonsche Axiom und erläutern Sie dies. (2 P)

Aktionsprinzip: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, \mathbf{F} ist die Kraft (Vektor), m die Masse des Körpers, und \mathbf{a} die Beschleunigung (Vektor).

- Nennen Sie das Gravitationsfeld eines Massenpunktes und erläutern Sie dies. (2 P)

Die Newtonsche Gravitationstheorie basiert sich auf folgende Kraft zwischen zwei Massenpunkte:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}.$$

Die Kraft ist radial, proportional zu den Massen m_1 und m_2 , der Gravitationskonstante $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ und der Abstand r durch r^{-2} . Das Gravitationsfeld der Masse m_1 schreibt man als

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m_2} = -G \frac{m_1}{r^3} \mathbf{r}.$$

- Nennen Sie die potentielle Energie eines Massenpunktes nah der Erdoberfläche und erläutern Sie diese. (3 P)

Die Newtonsche Gravitationskraft nah der Erdoberfläche lautet $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, wobei $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ die Gravitationsbeschleunigung senkrecht zur Erdoberfläche ist. Mit dem Konvention, dass die Potentielle Energie U an der Erdoberfläche gleich Null ist, die Energie für eine Höhe h ist dann $U(h) = mgh$.

- Erläutern Sie allgemein den Unterschied zwischen konservative und nicht konservative Kräfte. (2 P)

Für konservative Kräfte ist die verrichtete Arbeit entlang einem geschlossenen Weg gleich null, für nicht-konservative Kräfte nicht.

- Was sind Scheinkräfte? (2 P)

Scheinkraft, eine Kraft die vom Bezugssystem, in dem man einen physikalischen Vorgang beobachtet oder beschreibt, abhängt. Scheinkräfte verschwinden, wenn man in ein Inertialsystem übergeht. Anschaulich handelt es sich bei einer Scheinkraft um den Widerstand eines Körpers, der sich gegenüber Änderungen seines Bewegungszustandes bemerkbar macht. Bei kräftefreier Bewegung resultiert die Trägheit aus diesem Widerstand. In beschleunigten Bezugssystemen (Rotation, translatorische Beschleunigung) treten Scheinkräfte auf. Beispiele sind die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft in rotierenden Systemen und die Kräfte, die auf die Passagiere eines auf gerader Strecke beschleunigenden oder bremsenden Fahrzeuges wirken.

- Erläutern Sie das 2. Newtonsche Axiom für die Rotation eines starren Körpers ? (2 P)

Für die Rotation eines starres Objekt man hat die sogenannte Trägheitsmoment $I = \int r^2 dm$, wobei r die Abstand von der Rotationsachse und dm ein infinitesimal Masselement sind, die

Name: _____

Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$, und das Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Die 2. Newtonsche Axiom lautet $\mathbf{M} = I \vec{\alpha}$. Eine alternative Formulierung wäre $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$, mit $\mathbf{L} = I \vec{\omega}$ und $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit ist.

- Nennen Sie die kinetische Energie für die Rotation eines starren Objekts. Welchen Rolle spielt der Trägheitsmoment? (3 P)

Die kinetische Energie der Rotation eines starres Körpers lautet $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$, wobei $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit und I der Trägheitsmoment sind. Hier spielt I die Rolle der Masse in der kinetische Energie der Translation.

- Erläutern Sie die Bedeutung der Temperatur für einen Idealgas. (3 P)

Für einen Idealgas ist die Temperatur T proportional zur innere Energie U des Gases: $U = ncRT$, wobei n die Molmenge, R die Idealgaskonstante und c ein Faktor proportional zur Freiheitsgraden des Gases sind. Für monoatomische Gasen, $c = 3/2$. Also, jeden Freiheitsgrad beträgt einen Faktor $1/2$.

- Warum ist Wärme keine thermodynamische Zustandsgrösse? (3 P)

Die Wärme ist keine thermodynamische Zustandsgrösse, weil in einem Prozess die Wärme abhängig vom Weg ist.

- Erläutern Sie das 2. Prinzip der Thermodynamik (3 P).

Die zweite Hauptsatz der Thermodynamik entspricht der „Qualität“ der Wärme als Energie. Es gibt verschiedene äquivalente Formulierungen, z.B., es ist unmöglich, dass eine Maschine nur mit Wärme Energie von einer einzelner Quelle Arbeit verrichtet (*Perpetuum Mobili* zweite Art).

Rechenteil (40 P)

• KINEMATIK (8 P)

Planetenbewegung (8 P)

Im Folgenden soll ein bisschen im Sonnensystem herum gerechnet werden. Nehmen Sie dazu an, dass die Planetenbahnen kreisförmig sind und der Erdradius 6378 km beträgt.

1. Berechnen Sie die Masse der Sonne aus dem Abstand $150 \cdot 10^6$ km zwischen Erde und Sonne sowie der Umlaufzeit der Erde um die Sonne.

Es gilt die Gleichheit von Zentripetalkraft F_Z und Gravitationskraft F_G

$$F_Z = m_E \frac{v_E^2}{r_{SE}} = G \frac{m_E m_S}{r_{SE}^2} = F_G,$$

also $v_E^2 = G m_S / r_{SE}$.

Nach genau einem Jahr (Umlaufzeit $t_E = 3.156 \cdot 10^7$ s) hat die Erde die Strecke $2\pi r_{SE}$ zurückgelegt,

also gilt: $v_E^2 = \left(\frac{2\pi r_{SE}}{t_E} \right)^2$.

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für die Geschwindigkeit liefert:

$$m_S = \frac{4\pi^2 r_{SE}^3}{G t_E^2} = 2.1 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

2. Berechnen Sie die Masse der Erde.

Auf der Erdoberfläche gilt: $G \frac{m_E}{r_E^2} = g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Also $m_E = \frac{g r_E^2}{G} = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

3. Berechnen Sie aus der Länge eines Jupiterjahres, nämlich 11.86 Erdjahre, den Abstand zwischen Sonne und Jupiter.

Es gilt wieder Gleichheit von Zentripetalkraft und Gravitationskraft, diesmal allerdings für den Jupiter auf seiner Umlaufbahn:

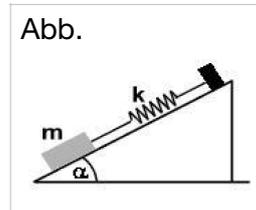
$$\left(\frac{2\pi r_{SJ}}{t_J} \right)^2 = v_J^2 = G \frac{m_S}{r_{SJ}}$$

Wir lösen nach r_{SJ} auf $r_{SJ} = \left(\frac{G m_S t_J^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$.

Mit dem Ergebnis aus 1. und $t_J = 11.86 \cdot t_E$ ergibt sich: $r_{SJ} = 770 \cdot 10^6 \text{ km}$.

• DYNAMIK (8 P)

Feder auf schiefer Ebene (8 P)



Auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel $\alpha = 20^\circ$ befindet sich ein Körper der Masse $m = 1$ kg. An dem Körper ist ein masseloser starrer Draht befestigt, der den Körper mit einer Feder der Federkonstanten D verbindet, die ihrerseits an der Spitze der schiefen Ebene befestigt ist.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Vernachlässigen Sie hierbei die Reibung.

Würde der Neigungswinkel $\alpha = 90^\circ$ betragen, so hätten wir es mit einem ganz normalen Federpendel zu tun. Da aber in Aufgabenteil 3. explizit nach der α -Abhängigkeit gefragt ist, werden wir diese gleich in der Bewegungsgleichung berücksichtigen.

Wählen wir die positive x -Richtung so, dass sie die schiefe Ebene herab zeigt, so ergibt sich bei einer Auslenkung der Feder um x aus der Ruhelage x_0 für die resultierende Kraft $F = F_{\text{Hang}} - F_{\text{Feder}}$, also $m\ddot{x} = mg \sin \alpha - Dx \rightarrow \ddot{x} + \omega x = g \sin \alpha$ mit $\omega = \sqrt{D/m}$.

Die Lösung der homogenen DGL ist die bekannte Schwingungsfunktion:

$$x_h(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t).$$

Da die Inhomogenität hier nur eine Konstante ist, wählen wir als Ansatz ebenfalls eine konstante Funktion $x_p(t) = C$. Eingesetzt in die DGL ergibt sich:

$$x_p(t) = \frac{g \sin \alpha}{\omega^2} = x_0.$$

Die totale Lösung lautet somit $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ erhält man für die Koeffizienten: $A = v_0/\omega$, $B = 0$. Man erhält also insgesamt:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0.$$

2. Welche Federstärke D muss die Feder besitzen, damit die Masse mit einer Frequenz $\nu = 10$ Hz schwingt?

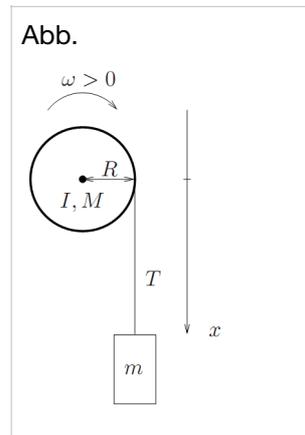
Es gilt $\omega^2 = (2\pi\nu)^2 = D/m \rightarrow D = m(2\pi\nu)^2 = 4 \text{ kN/m}$.

3. Welchen Einfluss hat der Neigungswinkel α auf das System?

Die Eigenfrequenz ω hängt nicht vom Winkel α ab. Die Ruhelage $x_0 = \frac{g \sin \alpha}{\omega^2}$ allerdings schon.

• STARRE OBJEKTE (8 P)

Masse am Zylinder (8P)



Ein Zylinder mit dem Radius R , der Masse M und dem Trägheitsmoment $I = \frac{1}{2}MR^2$ ist raumfest so gelagert, dass er um seine horizontal liegende Symmetrieachse rotieren und sich ansonsten nicht bewegen kann. Eine Schnur wird um den Zylinder gewickelt und die Masse m angehängt. Bestimmen Sie die lineare Beschleunigung der angehängten Masse, die Winkelbeschleunigung des Zylinders, die Spannung in der Schnur sowie die vertikale Kraft, die den Zylinder trägt.

Die Seilspannung sei T und die positive x -Achse zeige vertikal nach unten. Die Vorzeichenkonvention für ω ist so wie in der Skizze gezeigt. Es sind andere Konventionen möglich, diese müssen aber konsistent sein. Man bekommt drei Bewegungsgleichungen: Eine für die Rotation des Zylinders, eine für die lineare Beschleunigung der angehängten Masse und eine Zwangsbedingung durch den Faden, die die beiden Bewegungsgleichungen verknüpft.

$$I\dot{\omega} = RT, \quad m\ddot{x} = mg - T, \quad \ddot{x} = R\dot{\omega}.$$

Die Vorzeichen sind korrekt im Sinne der gewählten Konvention, z.B. führt eine positive Fadenspannung zu einer positiven Winkelbeschleunigung. Dies sind drei Gleichungen für drei Unbekannte $\dot{\omega}$, \ddot{x} und T .

Elimination von \ddot{x} führt zu: $I\dot{\omega} = RT$ und $mR\dot{\omega} = mg - T$.

Multiplikation der zweiten Gleichung mit R und Addition zur ersten Gleichung liefert eine Gleichung für $\dot{\omega}$: $(I + mR^2)\dot{\omega} = mgR$, also $\dot{\omega} = \frac{mgR}{I + mR^2} = \frac{g/R}{1 + M/(2m)}$.

Für die lineare Beschleunigung folgt $\ddot{x} = R\dot{\omega} = \frac{g}{1 + M/(2m)}$ und für die Seilspannung

$$T = \frac{I\dot{\omega}}{R} = \frac{Mg/2}{1 + M/(2m)}.$$

Die Tragkraft F ist schließlich die Summe aus Seilspannung und Gewichtskraft des Zylinders: $F = T + Mg$.

Name: _____

1. Wie hoch steigt die Flüssigkeit in diesem gekrümmten Rohr auf, wenn sie in einem an gleicher Stelle eingetauchten geraden Rohr eine Steighöhe $h_1 = 10$ cm erreicht und wenn die Strömungsgeschwindigkeit an der gegebenen Stelle gleich $v_1 = 1.4$ m/s ist?

Mit der Bernoulli Gleichung gilt für das gekrümmte Rohr $p_1 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \rho gh$. Im geraden Rohr gilt $p_1 = \rho gh_1 + p_0$. Subtrahiert man die beiden Gleichungen voneinander, so kann man die gesuchte Höhe h berechnen: $\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g(h - h_1) \rightarrow h = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = 20$ cm.

2. Wie groß ist demnach der dynamische Druck im Wasser?

Der Dynamische Druck ist $\frac{1}{2}\rho v_1^2 = 980$ Pa.

• THERMODYNAMIK (8 P + 4 P BONUS)

Beheizbares Zimmer (8P)

Gegeben sei ein beheizbares Zimmer mit dem Volumen 75 m³ und der Anfangstemperatur 14 °C.

Die Heizung werde nun aufgedreht, bis die Endtemperatur 20 °C erreicht ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Luft näherungsweise als reinen Stickstoff N₂ und diesen als ideales Gas. Der Luftdruck soll 1013 hPa betragen und sich durch das Heizen nicht verändern.

Anmerkung: Der Vibrationsfreiheitsgrad von N₂ ist hier eingefroren.

1. Wie groß ist die in der Zimmerluft anfänglich enthaltene Energie?

Für Stickstoff als 2-atomiges ideales Gas gilt: $U = \frac{5}{2}nRT$, die Molzahl n wird mit Hilfe der idealen Gasgleichung bestimmt: $n = \frac{pV}{RT}$. Damit folgt: $U = \frac{5}{2}pV = 19$ MJ.

2. Wie groß ist die Energie der Zimmerluft nach Beendigung des Heizvorgangs?

Aus $U = \frac{5}{2}pV$, U im geheizten Zimmer genauso groß, wie im ungeheizten ist. Dies liegt daran, dass die Luftmenge im Zimmer abnimmt ($p = \text{const}$).

3. Welche Wärmeenergie hat die Heizung abgegeben?

Da n nicht konstant ist, starten wir mit $dQ = C_p dT = n \frac{7}{2} R dT$, wobei n eine abnehmende Funktion von T ist. Wegen $pV = \text{const}$ gilt wegen der idealen Gasgleichung $nT = \text{const}$, also $nT = n_0 T_0$ und damit $n(T) = n_0 T_0 / T$.

Name: _____

Damit erhalten wir $dQ = n_0 T_0 \frac{7}{2} R \frac{dT}{T}$, was zu $Q = \frac{7}{2} n_0 T_0 R \ln \frac{T_1}{T_0}$ integriert werden kann. n_0 folgt aus $n_0 = \frac{pV}{RT_0}$. Also $Q = \frac{7}{2} pV \ln \frac{T_1}{T_0} = 550 \text{ kJ}$.

B) Klimaanlage (4 P)

Betrachtet werde eine Klimaanlage, die nach dem Prinzip eines linksläufigen Carnotschen Kreisprozesses betrieben wird. Der Carnotprozess arbeitet dabei zwischen einem kalten und einem heißen Reservoir mit den Temperaturen T_k und T_h . Je nach Jahreszeit arbeitet die Klimaanlage als Wärmepumpe oder als Kältemaschine.

Hinweis: Bedenken sie, dass die Isothermen eines Carnotprozesses recht gut mit einem TS -Diagramm betrachtet werden können.

1. Wie groß ist die Leistungsziffer $\epsilon = \frac{Q_{\text{aus}}}{W_{\text{ges}}}$ für eine Heizung ($T_h = 298 \text{ K}$, $T_n = 268 \text{ K}$)?
2. Wie groß ist $\epsilon_0 = \frac{Q_{\text{ein}}}{W_{\text{ges}}}$ für die Raumkühlung im Sommer ($T_h = 313 \text{ K}$, $T_n = 298 \text{ K}$)?

Es handelt sich um einen Kreisprozess, deshalb gilt $\Delta U = 0 = Q_{\text{ein}} + Q_{\text{aus}} - W$. Der Carnotprozess stellt im TS -Diagramm ein Rechteck dar. Die Integrationen entlang der Isothermen kann also sehr einfach durchgeführt werden.

$$Q_{\text{aus}} = \int_{S_h}^{S_n} T_h dS = T_h(S_n - S_h) \text{ und } Q_{\text{ein}} = \int_{S_n}^{S_h} T_n dS = T_n(S_h - S_n).$$

Die Arbeit ergibt sich als Differenz der beiden bzw. entspricht sie der eingeschlossenen Fläche

$$W = (T_n - T_h)(S_h - S_n).$$

Damit kann man direkt die Leistungskoeffizienten bestimmen:

$$\epsilon = \frac{Q_{\text{aus}}}{W} = \frac{T_h}{T_h - T_n} = 9.9,$$
$$\epsilon_0 = -\frac{Q_{\text{ein}}}{W} = \frac{T_n}{T_h - T_n} = 19.9.$$