Übungsblatt I

Aufgabe 1

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen folgender Funktionen nach $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist.

$$\text{a) } f(r) = \frac{1}{r} \text{ , b) } f(r) = r^2$$

$$\text{c) } f(r) = \frac{1}{r} \cdot e^{-\alpha r} \text{ , d) } f(r) = \log(\alpha x^2 + \beta y^2)$$

Aufgabe 2

Der Zusammenhang zwischen einem Potenzial $V(\vec{r})$ und dem zugehörigen Kraftfeld $F(\vec{r})$ ist gegeben durch

$$F(\vec{r}) = -grad(V(\vec{r}))$$

Berechnen Sie für die folgenden Potentiale $V(\vec{r})$ die zugehörigen Kraftfelder $F(\vec{r})$

$$\text{a) } V(\vec{r}) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 \text{ , b) } V(\vec{r}) = A(x^2 + y^2 + \alpha z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{c) } V(\vec{r}) = \frac{B}{r^2} \text{ , d) } V(\vec{r}) = \frac{C}{r} \cdot e^{-\frac{r}{r_0}}$$

Aufgabe 3

Im folgenden seinen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ Vektoren.

a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von Produkten aus drei Vektoren
   - i) Das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ist das Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds
   - ii) Beim Spatprodukt können die Faktoren zyklisch vertauscht werden.
   - iii) Beweisen Sie die Graßmann Identität

     $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

   - iv) Zeigen Sie die Jacobi Identität

     $$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$$

b) Zeigen Sie die folgenden Zerlegungen von Produkten aus vier Vektoren
   - i)

     $$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$$

   - ii)

     $$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c} \cdot (\vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})) - \vec{d} \cdot (\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}))$$

Aufgabe 4

Gegeben seinen drei nicht in einer Ebene liegende Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ mit dem Spatprodukt $v = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$. Hieraus werden die drei "reziproken"Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ mittels folgender Definition berechnet

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \quad \text{1,2,3 zyklisch}$$

Zeigen Sie

a)

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij} \text{ wobei } \delta_{ij} \text{ das Kronecker-Delta ist}$$

b)

$$\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = \frac{1}{v}$$

c) Die zu den $\vec{b}_i$ reziproken Vektoren sind die $\vec{a}_j$

d) Wie lautet das zu den drei orthonormalen Basisvektoren $\vec{e}_i$ eines rechtwinkligen Koordinatensystems reziproke Vektortripel