

## Die Milankowitsch-Zyklen

von Oliver Schwarz

Die Hauptbewegungskomponenten der Erde (Eigenrotation, jährliche Bewegung um die Sonne und Präzession) untersuchten wir im Lernmodul B anhand eigener Messungen. Wie umfangreiche Forschungen belegen, unterliegen diese Bewegungskomponenten im Laufe langer Zeiträume einigen leichten Veränderungen. Diese sind aber messend zumeist nicht zu erfassen, schon gar nicht mit unseren einfachen Beobachtungsverfahren. Daher müssen wir uns hauptsächlich auf theoretische Erwägungen stützen.

Zu den zeitlich veränderlichen Parametern der Erdbewegung gehört eine leicht schwankende numerische Exzentrizität  $\varepsilon$  der Erdbahn, eine geringfügige Veränderung in der Neigung der Erdachse  $\alpha$  und eine langsame Lageänderung des sonnennächsten Bahnpunktes der Erdbahn. Diese sogenannte Perihelverschiebung kann man als Drehung der großen Achse der Erdbahn um die Sonne auffassen. Die Tabelle 4-1 gibt einen Überblick über alle wesentlichen Größen, welche die Bewegungsgeometrie der Erdbewegung beeinflussen sowie die typischen Zeiträume für ihre Variationen. Die Abb. 4-1 veranschaulicht sie.

Form der Erdbahn	Schiefe der Ekliptik	Periheldrehung	Präzession
numerische Exzentrizität schwankt zwischen 0,01 und 0,05	Neigung der Erdachse variiert zwischen 22,1 und 24,5°	sonnennächster Punkt der Erdbahn wandert um die Sonne	Kreiselbewegung der Erdachse
Zeitraum ca. 100000a	Zeitraum ca. 40000a	Zeitraum ca. 150000a	Zeitraum 26000a

Tab. 4-1: Überblick zur Änderung von Parametern der Erdbewegung

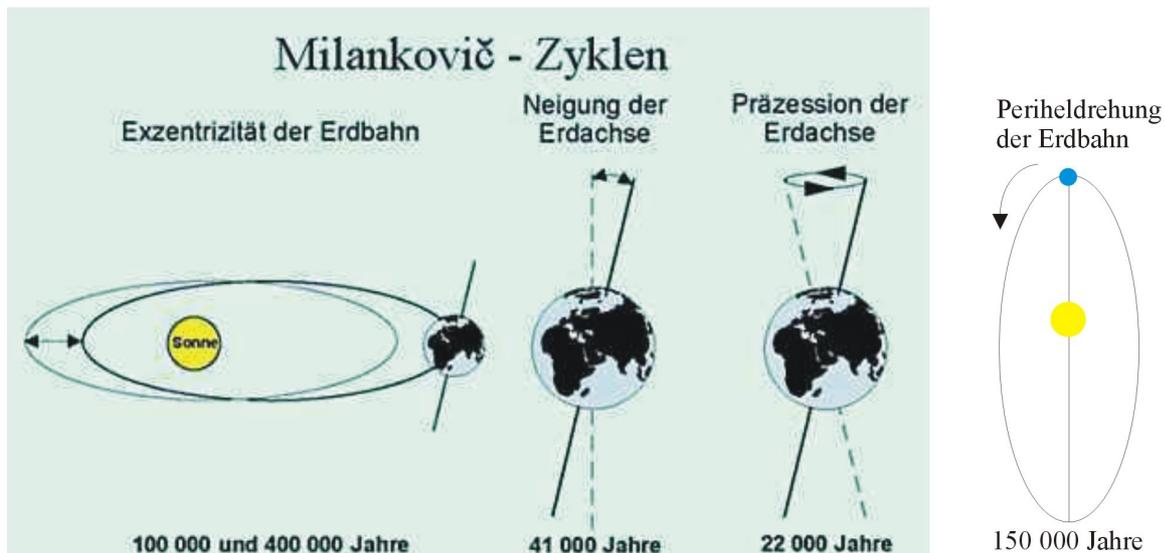


Abb. 4-1: Milankowitsch-Zyklen

Wir müssen besonders betonen, dass es sich bei den in der Tabelle 4-1 gegebenen Zeiträumen um keine strengen Perioden handelt, sondern um gemittelte Werte, die über längere Zeiträume hinweg stabil bleiben. Deshalb werden die entsprechenden Bewegungsvorgänge auch nicht als periodisch, sondern als quasiperiodisch bezeichnet. Beispielhaft sei dies an der zeitlichen Änderung der numerischen Exzentrizität der Erdbahn verdeutlicht. Stellt man in einem Computerprogramm neben der Gravitationswirkung zwischen Sonne und Erde auch die Störungen, die andere Himmelskörper auf die Erde ausüben, in Rechnung, dann ergibt eine Langzeitsimulation das in der Abb. 4-2 gezeigte Bild der Veränderung der numerischen Exzentrizität. Offenbar kann diese in einem *annähernd* periodischen Zeitraum von ca. 100000 Jahren in *annähernd* gleicher Weise zwischen den Extremwerten  $\varepsilon=0,01$  und  $\varepsilon=0,05$  schwanken. Über sehr lange Zeiträume hinweg sind übrigens auch mit Hochleistungsrechnern keine Vorhersagen (bzw. Rückrechnungen) mehr möglich. Selbst kleinste unvermeidbare Fehler bei der messenden Erfassung der Startbedingungen - den gerade aktuellen Bewegungsparametern - führen auf lange Sicht zu nicht vorhersagbaren Änderungen.

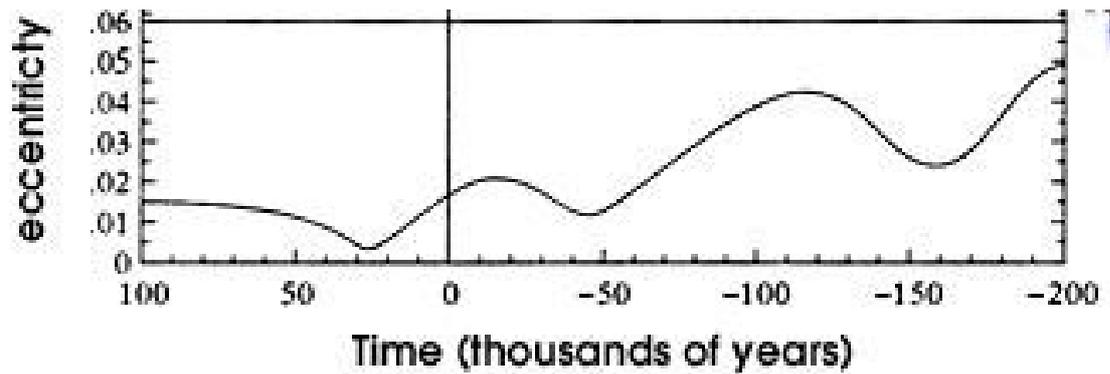


Abb. 3-17: Quasiperiodische Veränderungen der numerischen Exzentrizität der Erdbahn, der Graph ist das Resultat einer Mehrkörpersimulation, welche sich von der Gegenwart ( $t=0$ ) sowohl in die Vergangenheit als auch die Zukunft erstreckt

### Die Solarkonstante und ihre Abhängigkeit von der Erdbahnexzentrizität

Mit der folgenden Herleitung wollen wir herausfinden, ob die Änderung der numerischen Exzentrizität der Erdbahn einen Einfluss auf die Solarkonstante hat. Dazu benötigen wir die Keplerschen Gesetze und einige Ellipsengleichungen.

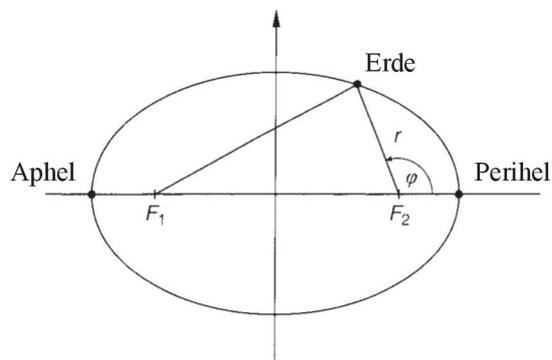


Abb. 4-3: Elliptische Erdbahn mit einigen Bahnparametern und Bahnpunkten

Bekanntlich besitzt jede Ellipse zwei symmetrisch zum Mittelpunkt liegende Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$ , eine große Halbachse  $a$  und eine kleine Halbachse  $b$  (Abb. 4-3). Die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$  einer Ellipse ist definiert als:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (4-1)$$

Die Größe  $p=b^2/a$  nennt man den Ellipsenparameter. Wie man sich elementargeometrisch überlegen kann, gilt für den Abstand  $r$  des (in der Abb. 4-3 rechten!) Brennpunktes von der Ellipsenkurve der Zusammenhang

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} . \quad (4-2)$$

Diese Gleichung werden wir benötigen, um die Bahnbewegung der Erde anhand der polaren Koordinaten  $r$  und  $\varphi$  zu verfolgen - allerdings in einer leicht abgewandelten Form. Aus (4-1) folgt

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) \quad (4-3)$$

und aus dieser Gleichung und der Definition von  $p$  ergibt sich:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi} . \quad (4-4)$$

Den Winkel  $\varphi$  nennt man in der Astronomie die *wahre Anomalie*. Nun bestimmen wir das Verhältnis der Beträge der Bahndrehimpulse  $P_1$  und  $P_2$  von zwei Planeten, die sich um die Sonne bewegen. Bekanntlich stellt das 2. Keplersche Gesetz nichts anderes dar, als eine abgewandelte Formulierung des Drehimpulserhaltungssatzes. Der Drehimpulsbetrag  $P$  ist

$$P = mr^2\dot{\varphi} . \quad (4-5)$$

Der Flächensatz fordert, dass der Leitstrahl Planet – Sonne (=Ort eines Ellipsenbrennpunktes) in gleichen Zeiten gleiche Flächen  $A$  überstreicht, also die Flächengeschwindigkeit konstant ist:

$$\frac{dA}{dt} = const. \quad (4-6)$$

Anhand der Abb. 4-4 erkennt man, dass  $dA$  als kleines rechtwinkliges Dreieck mit der Seitenlänge  $r$  und der Höhe  $r d\varphi$  darstellbar ist, sodass gilt:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \quad (4-7)$$

und sich die Flächengeschwindigkeit ergibt als

$$\text{const.} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{P}{2m}, \quad (4-8)$$

woraus  $dP/dt=0$ , also Impulserhaltung, folgt.

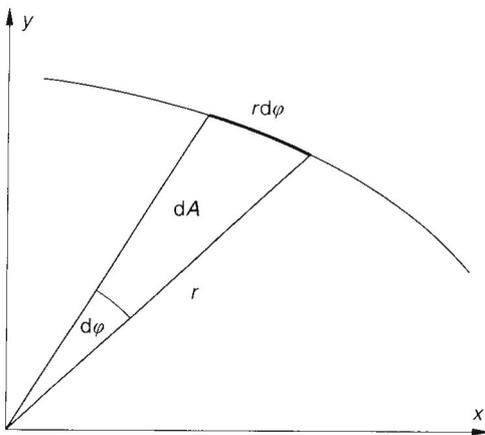


Abb. 4-4: Graphische Veranschaulichung des Flächensatzes

Bei einem vollständigen Umlauf überstreicht der Leitstrahl Sonne – Planet den Flächeninhalt  $A=\pi ab$  der Bahnellipse in der Zeit einer Umlaufperiode  $T$ . Für die Betrachtung dieses Zeitintervalls ist dann speziell (siehe Gl. 4-8):

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{P}{2m}. \quad (4-9)$$

Wählen wir zwei Planeten *identischer Masse* mit den Bahndrehimpulsbeträgen  $P_1$  und  $P_2$ , dann folgt:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1 b_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{a_2 b_2}. \quad (4-10)$$

Diese Formel mag auf den ersten Blick keinen rechten Sinn ergeben, denn die Wahrscheinlichkeit, dass man in einem Sonnensystem zwei Planeten mit exakt identischer Masse findet, ist verschwindend gering. Gehen wir aber von den idealisierten Verhältnissen des Zweikörperproblems zum Mehrkörperproblem über, ändert sich die Situation:

Idealisieren wir die Erde als einzigen Himmelskörper im Sonnensystem, dann sind ihr Drehimpuls und ihre Gesamtenergie zeitlich konstant. In Wahrheit wechselwirken aber alle Planeten des Sonnensystems miteinander. Dabei bleibt der Gesamtdrehimpuls und die Gesamtenergie des kompletten Sonnensystems erhalten, die Verteilung dieser Größen auf die einzelnen Himmelskörper kann sich aber sehr wohl zeitlich ändern, wobei sich auch die Bahnform, also die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$ , ändern kann. Genau dieser Fall liegt bei der Erde vor und die Gleichung (4-10) stellt dann einen Zusammenhang zwischen Bahndrehimpuls und Bahnform der Erde zu unterschiedlichen Zeitpunkten her.

Da die Erdbahn exzentrisch ist, verändert sich der Abstand Erde-Sonne, wodurch sich die Sonneneinstrahlung (Gleichung 2-38) ebenfalls während eines Bahnumlaufs ändert. Um die Sonneneinstrahlung für zwei unterschiedliche Erdbahnen zu vergleichen, müssen also geeignet gemittelte Solarkonstanten berechnet werden. Dabei könnte man zunächst auf die Idee verfallen, die auf den jeweiligen Abstand Erde-Sonne bezogenen Flächenleistungen der Sonnenstrahlung  $s^*$  entlang der Erdbahn zu berechnen und die Resultate für zwei Bahnen unterschiedlicher Exzentrizität zu vergleichen. Aus der Definition (2-38) und der Gleichung (4-4) ergibt sich als Flächenstrahlungsleistung  $s^*$  für eine bestimmte wahre Anomalie  $\varphi$ :

$$s^* = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{L}{4\pi} \cdot \frac{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{a^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \quad (4-11)$$

Eine plausible Annahme, die man für die Langzeitvariationen von  $\varepsilon$  machen kann, ist die Forderung, dass dabei im Mittel die Länge eines Erdjahres nicht geändert werden soll. Nach dem dritten Keplerschen Gesetz ist diese Forderung identisch mit der Forderung nach einem im Mittel unveränderlichen Zahlenwert für die große Halbachse der Erdbahn, es gilt also  $a = \text{const}$ .

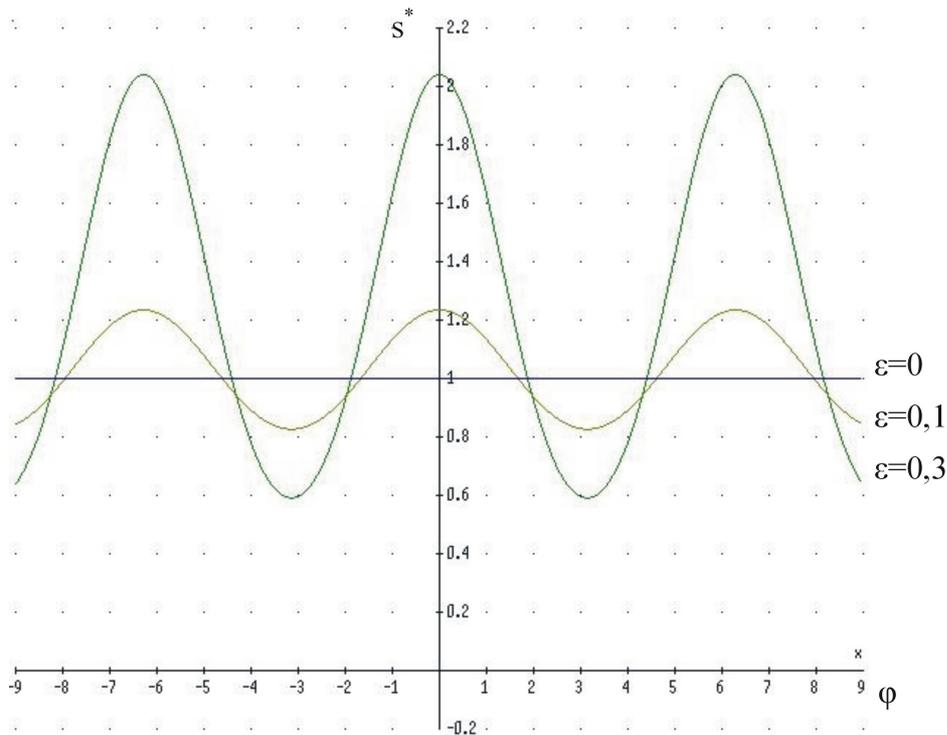


Abb. 4-5: Flächenleistung der Sonneneinstrahlung  $s^*$  [ $\text{Wm}^{-2}$ ] in Abhängigkeit von der wahren Anomalie  $\varphi$  [rad] für unterschiedliche numerische Exzentrizitäten  $\epsilon$

Die Abb. 4-5 zeigt die Abhängigkeit  $s^*$  von der wahren Anomalie  $\varphi$  für unterschiedliche Exzentrizitäten. Mit einem Programm zur Darstellung von Funktionen (z. B. Derive) kann man ähnliche Graphen leicht selbst erzeugen. Um die Auswirkung von  $\epsilon$  auf  $s^*$  überhaupt zu visualisieren, wurden die Werte  $\epsilon=0$ ; 0,1; 0,3 gewählt, also eine deutlich größere Schwankung der numerischen Exzentrizität angenommen, als sie für die Erde tatsächlich vorliegt.

Man erkennt, dass bei größeren numerischen Exzentrizitäten die Einstrahlungen deutlich erhöht sind, wenn sich die Erde in Sonnennähe befindet. Die Abb. 4-6 visualisiert den Grund hierfür. Bei großen Bahnexzentrizitäten nähert sich die Erde der Sonne merklich an.

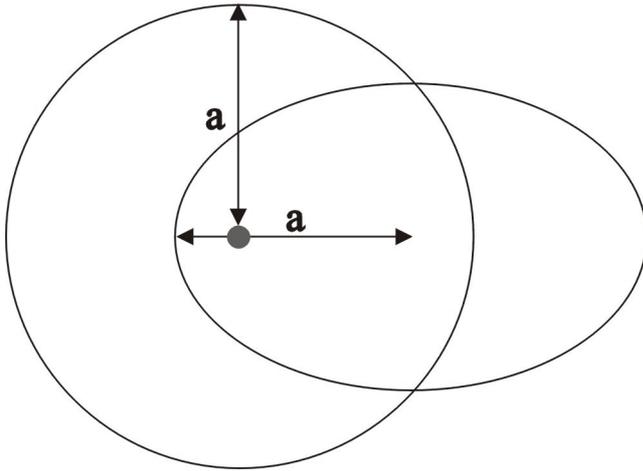


Abb. 4-6: Bei einer großen numerischen Bahnexzentrizität nähert sich ein Planet seinem Zentralgestirn merklich an.

Für die Berechnung der *mittleren* Solarkonstante eines vollständigen Bahnumlafs ist jedoch folgender Umstand zu beachten:

Wegen des 2. Keplerschen Gesetzes verringert sich die Bahngeschwindigkeit der Erde in größeren Entfernungen zur Sonne. Durchläuft die Erde also einen sehr weit von der Sonne entfernten Bahnabschnitt, dann ist  $s^*$  einerseits recht klein, andererseits hält sich die Erde relativ lange Zeit in diesem Bahnabschnitt auf. Zur Berechnung der Solarkonstante müssen wir deshalb die einzelnen Strahlungsanteile  $s^*$  entlang der Erdbahn wichten. Die Berechnung der mittleren Solarkonstante muss demnach auf ähnliche Weise wie die Berechnung des Notendurchschnitts einer Klassenarbeit erfolgen. Das Gewicht, welches ein bestimmter Wert  $s^*$  besitzt, entspricht dem relativen Zeitanteil, den dieser Strahlungswert im Laufe eines Jahres wirksam ist. Ganz ausführlich heißt das für die über  $n$ -Bahnabschnitte gemittelte Solarkonstante  $\bar{s}$ :

$$\bar{s} = \frac{\frac{L}{4\pi r_1^2} \Delta t_1 + \frac{L}{4\pi r_2^2} \Delta t_2 + \dots + \frac{L}{4\pi r_n^2} \Delta t_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta t_i}{r_i^2}}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i} \quad (4-12)$$

Summiert man über einen vollen Bahnlauf und geht von differentiell kleinen Zeitelementen aus, dann wird aus der Summe der einzelnen Zeitelemente im Nenner von (4-12) die Umlaufzeit  $T$ , im Zähler ein bestimmtes Integral von der Startzeit  $t=0$  bis zu  $t=T$ :

$$\bar{s} = \frac{L}{4\pi T} \int_0^T \frac{1}{r^2} dt . \quad (4-13)$$

Um dieses Integral zu lösen, müssen wir eine Möglichkeit zur Substitution von dt finden. Dafür bietet sich der Drehimpuls an, denn nach Gleichung (4-5) können wir schreiben

$$dt = \frac{mr^2}{P} d\varphi \quad (4-14)$$

und aus dem Integral (4-13) wird

$$\bar{s} = \frac{L}{4\pi T} \int_0^{2\pi} \frac{m}{P} d\varphi . \quad (4-15)$$

Für eine bestimmte Bahn ist der Bahndrehimpuls konstant, daher ergibt sich aus (4-15) einfach

$$\bar{s} = \frac{Lm}{2TP} . \quad (4-16)$$

Auf den ersten Blick mag es vielleicht etwas überraschend sein, dass die mittlere Solarkonstante mit dem Bahndrehimpuls verknüpft ist, doch man kann sich diesen Zusammenhang zur Gleichung 2-38 für eine Kreisbahn schnell vergegenwärtigen.

Betrachten wir nun die Solarkonstanten für zwei mögliche Erdbahnen mit gleicher Jahreslänge (resp. gleicher Halbachse a) und beziehen dabei die Gleichungen (4-10) und (4-3) in die Überlegung ein, dann ergibt sich:

$$\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_2^2}}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2}} . \quad (4-17)$$

Mit den Zahlenwerten für die gegenwärtige Erdbahn von  $\bar{s}_2 = 1370 \text{ Wm}^{-2}$  [19] und  $\varepsilon_2 = 0,0167$  erhält man mit einem prognostizierten maximalen  $\varepsilon_1$  von  $\sim 0,05$  eine

dazugehörige Solarkonstante von  $\bar{s}_2 = 1371,6 \text{ Wm}^{-2}$ . Dies entspricht einer prozentualen Änderung der Solarkonstante von 0,1% bzw. einer absoluten Änderung von  $1,6 \text{ Wm}^{-2}$ . Die Solar-„konstante“ ist nur in Zeiträumen von maximal  $10^3$  Jahren annähernd konstant.

### Die Abschätzung des Länge des platonischen Jahres

Bei den folgenden Überlegungen kommen die aus der Mechanik der starren Körper bekannten Kreiselgesetze zur Anwendung [56, S. 158-203]. Die Erde ist infolge ihrer Rotation zu einem Rotationsellipsoid abgeflacht und besitzt einen Äquatorwulst. An diesem Äquatorwulst können die Gezeitenkräfte des Mondes, der Sonne oder anderer Himmelskörper angreifen, wodurch der rotierende Erdkörper nicht mehr als kräftefreier Kreisel angesehen werden kann.

Vielmehr folgt die Rotationsachse der Erde der Wirkungsrichtung des äußeren Drehmoments, wodurch eine Ausweichbewegung entsteht, die in die sogenannte Präzessionsbewegung mündet. Die Abb. 4-7 verdeutlichen den Sachverhalt zunächst schematisch anhand eines einfachen Horizontalkreisels.

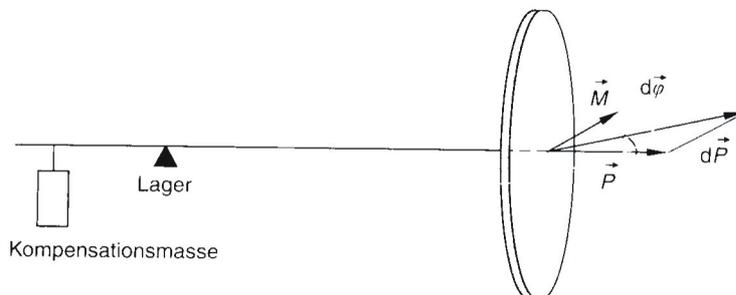


Abb. 4-7: Ein Horizontalkreisel ist die einfachste Variante zur physikalisch-geometrischen Veranschaulichung der Präzessionsbewegung.

Die Änderung der Lage der Drehachse wird verursacht, weil das äußere Drehmoment  $\vec{M}$  einen zusätzlichen Drehimpuls  $d\vec{P}$  erzeugt, der sich vektoriell zum Drehimpuls  $\vec{P}$  des rotierenden Kreiselkörpers addiert. Die Kreiselscheibe in der Abb. 4-7 bewegt sich deshalb in die Zeichenebene hinein.  $\vec{M}$  ist bekanntlich definiert als

$$\vec{M} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4-18)$$

( $\vec{F}$  angreifende äußere Kraft,  $\vec{r}$  Hebelarm dieser Kraft) und  $\vec{P}$  ist definiert als

$$\vec{P} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}. \quad (4-19)$$

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Vektorbeträge über. Die Winkelverschiebung  $d\varphi$  der Drehimpulsachse ist  $d\varphi = dP/P$  (siehe Abb. 4-7), sodass sich unter Verwendung der Gleichung (4-18) ergibt:

$$d\varphi = \frac{Mdt}{P} \quad (4-20)$$

oder

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{P} = \frac{Fr \sin \alpha}{J\omega_K \sin \alpha} = \frac{Fr}{J\omega_K}, \quad (4-21)$$

$\omega$  ist die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Kreisel präzidiert. Entsprechend der Definition des Drehmoments und des Drehimpulses als Vektorprodukt aus  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  bzw.  $\vec{r}$  und  $\dot{\vec{r}}$  ist  $\alpha$  der von diesen Vektoren eingeschlossene Winkel,  $\omega_K$  ist der Betrag der Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Kreisel um seine Drehachse rotiert und  $J$  ist der Betrag des Trägheitsmoments des Kreisels. Beim Horizontalkreisel hat der Winkel  $\alpha$  den Wert  $90^\circ$ . Für die Behandlung des Problems der Präzession der Erde ist der Winkel  $\alpha$  die Neigung der Erdachse gegenüber der Erdbahnebene.

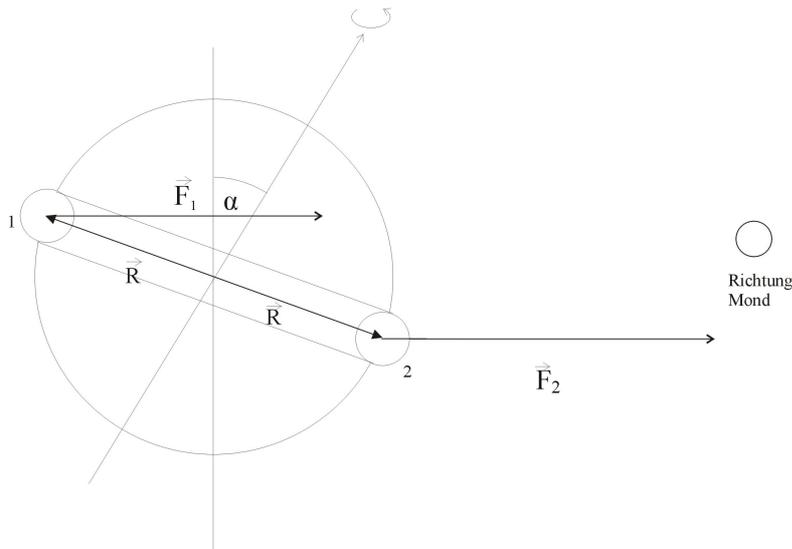


Abb. 4-8: Zur Erklärung des äußeren Drehmoments auf den Erdkörper

Betrachten wir nun den Erdkreisel und die Gezeitenkraft, die der Erdmond auf die Äquatorwülste der Erde ausübt. Wir verteilen die Masse des Äquatorwulstes auf vier jeweils um  $90^\circ$  versetzte Punkte entlang des Erdäquators. Vereinfachend wird angenommen, die Masse des ringförmigen Äquatorwulstes sei je zu einem Viertel auf die beiden gegenüberliegenden Punkte 1 und 2 verteilt (Abb. 4-8). Die anderen beiden Massenviertel des Äquatorwulstes sollen etwa in einer Ebene mit der Mondbahn liegen, sodass von ihrer Masse kein Drehmoment auf die Erde hervorgerufen wird. Der Mond ist so weit von der Erde entfernt, dass man die am Äquatorwulst angreifenden Vektoren der Gravitationskräfte  $F_1$  und  $F_2$  als parallel zueinander ansehen kann. Die folgende Berechnung gilt zunächst nur für die geometrische Situation der Abb. 4-8. Auf den Massenpunkt 1 wirkt das Drehmoment  $M_1 = RF_1 \sin(180^\circ - \alpha)$ , auf den Massenpunkt 2 das Drehmoment  $M_2 = RF_2 \sin \alpha$ . Wie man mit der Rechten-Hand-Regel prüft, sind die Vektoren der Drehmomente  $M_1$  und  $M_2$  genau entgegengesetzt gerichtet. Ihre Resultierende ist aber nicht Null, da die Gravitationskräfte  $F_1$  und  $F_2$  unterschiedlich groß sind. Da für die Sinusfunktion die Quadrantenbeziehung  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  gilt, ergibt sich ein resultierendes Drehmoment:

$$M = M_2 - M_1 = RF_2 \sin \alpha - RF_1 \sin \alpha = \frac{1}{4} RGM_M M_W \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \sin \alpha \quad (4-22)$$

( $M_M$ : Masse des Mondes,  $M_W$ : Masse des Äquatorwulstes der Erde).

In guter Näherung dürfen wir setzen:  $r_2+r_1=2r$ ,  $r_1^2 \cdot r_2^2 = r^4$  und  $r_1-r_2=2R\cos\alpha$  ( $r$ : mittlerer Abstand Erde-Mond,  $R$ : Erdradius). Damit ergibt sich:

$$M = \frac{1}{4} GM_M M_W \frac{(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)}{r_2^2 \cdot r_1^2} \sin\alpha = GM_M M_W \cos\alpha \frac{R^2}{r^3} \cdot \sin\alpha . \quad (4-23)$$

Setzt man das Trägheitsmoment der Erde  $J$  näherungsweise als das einer homogenen Kugel an, dann erhält man aus (4-23) und (4-21):

$$\omega = \frac{GM_M M_W \cos\alpha \frac{R}{r^3} \cdot R}{\frac{2}{5} M_E R^2 \omega_E} = \frac{5 \cdot GM_M M_W \cos\alpha}{2 M_E \omega_E r^3} \quad (4-24)$$

( $\omega_E=2\pi/86400$ : Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation).

Unsere Rechnung ist noch nicht beendet, denn sie gilt, wie bereits erwähnt, ja zunächst nur für die in der Abb. 4-8 gezeigte spezielle Lage von Erde, Äquatorwulst und Mond. Eigentlich müsste man die Rechnung für jede spezielle Position von Erde und Mond nun wiederholen und die sich laufend ändernden Drehmomente bei der Berechnung berücksichtigen, doch in der Himmelsmechanik beschreitet man statt dieser komplizierten und aufwendigen Rechnung häufig einen anderen Weg:

Man weiß, dass sich die Störeinwirkungen des Mondes periodisch wiederholen und ermittelt deshalb einfach eine *mittlere* Störung auf die Erde. Um diese mittlere Störung in einfachster Näherung zu erhalten, müssen wir zwei Details der Abb. 4-8 noch einmal näher betrachten. Diese wurden in den Abb. 4-9 und 4-10 vergrößert gezeichnet.

Während eines Mondumlaufes dürfen wir die Lage der Erdachse als raumfest annehmen. Bewegt sich der Mond kreisförmig um die Erde, dann ändert sich natürlich der Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{R}$  und  $\vec{F}_1$  bzw.  $\vec{R}$  und  $\vec{F}_2$ , der über das Kreuzprodukt  $\vec{R} \times \vec{F}$  die Größe des angreifenden Drehmoments bestimmt. In der Abb. 4-9 beträgt er beispielsweise für die Vektoren  $\vec{R}$  und  $\vec{F}_2$  erst  $\alpha$  (Position 1, man beachte, wir betrachten den Winkel zwischen den Fußpunkten der Vektoren!), einen Viertelmonat später  $90^\circ$  (Position 2), wieder einen Viertelmonat später  $180^\circ-\alpha$

(Position 3) und noch einen Viertelmonat später erneut  $90^\circ$  (Position 4). Auch der Winkel zwischen  $\vec{R}$  und  $\vec{F}_1$  ändert sich in gleicher Weise, nur mit einer Phasenverschiebung von  $180^\circ$ .

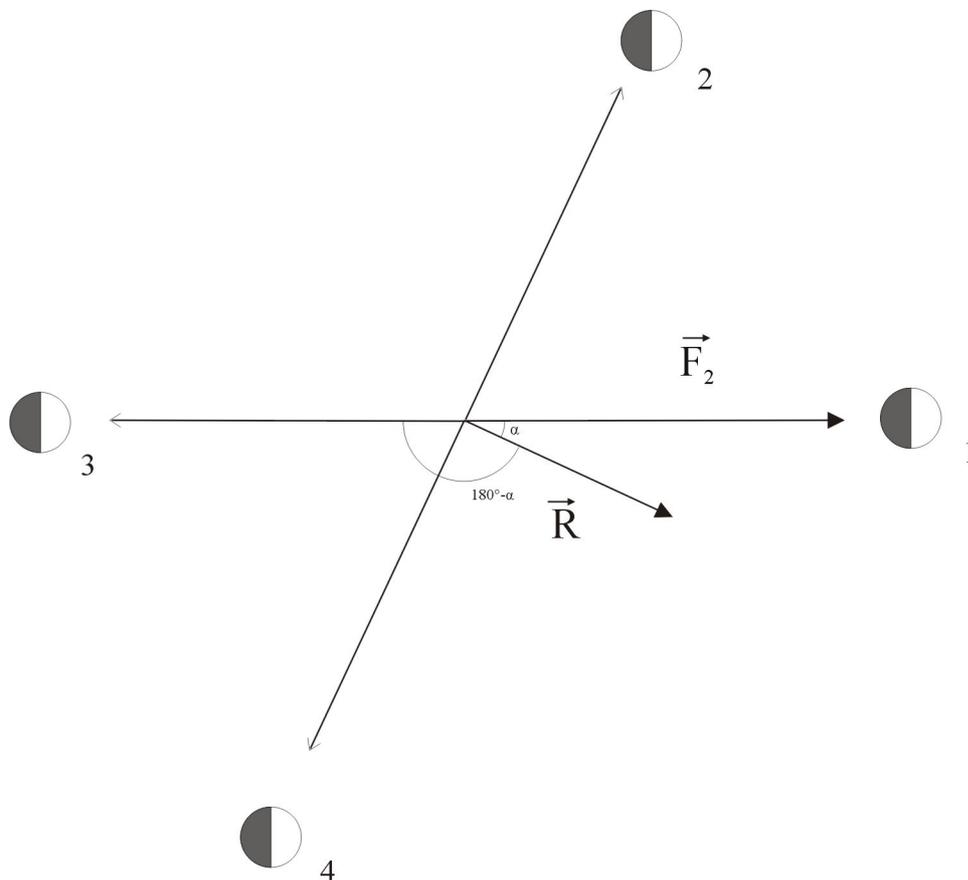


Abb. 4-9: Der Vektor  $\vec{R}$  bleibt in unserem Modell raumfest, der um die Erde kreisende Mond verändert ständig die Orientierung des Kraftvektors  $\vec{F}_2$ .

Um den *im Mittel* wirksamen Einfluss des Winkels  $\alpha$  auf den Betrag des angreifenden Drehmoments  $M=R\Delta F\sin\alpha$  zu berechnen, müssen wir demnach den  $\sin\alpha$  über einen halben Bahnumlauf des Mondes mitteln. Wie man über eine Winkelfunktion mittelt, haben wir bereits im Abschnitt 4.2.2 kennengelernt. Hier wird lediglich über einen anderen Winkelbereich gemittelt. Es ergibt sich für  $\alpha=23,5^\circ$ :

$$\frac{1}{(\pi - \alpha) - \alpha} \int_{\alpha}^{\pi - \alpha} \sin x dx = 0.79 . \quad (4-25)$$

Ein zweites Detail ist ebenfalls in Abb. 4-10 vergrößert gezeichnet.



$$\langle \cos \chi \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \chi \, d\chi = \frac{2}{\pi} \approx 0.64. \quad (4-26)$$

Insgesamt erhält man für das mittlere Drehmoment, welches der Mond auf die Erde ausübt:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= 0.64 \cdot 0.79 \cdot GM_M M_W \cos \alpha \frac{R^2}{r^3} \cdot \sin \alpha \\ &= 0.5 \cdot GM_M M_W \cos \alpha \frac{R^2}{r^3} \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4-27)$$

Der Übergang zum mittleren Betrag des äußeren Drehmoments eröffnet eine neue Möglichkeit zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsperiode. Auf gleiche Weise, wie wir das die Erdrotation störende mittlere Drehmoment des Mondes berechnet haben, könnten wir nun auch die von anderen Himmelskörpern verursachten mittleren Drehmomente  $M_i$  ermitteln und diese dann zu einem resultierenden Drehmoment zusammensetzen. Damit wird aus der Gleichung (4-21) die erweiterte Gleichung

$$\omega = \frac{1}{J \omega_K \sin \alpha} (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n). \quad (4-28)$$

Für die Sonne lässt sich ein mittleres Drehmoment wie für den Mond angeben, denn während die Erde im Laufe eines Jahres einmal um die Sonne kreist, treten prinzipiell die gleichen geometrischen Effekte wie bei der Mondbewegung um die Erde auf (annähernd raumfeste Lage der Erdachse, alle relativen Positionen Sonne-Erde durchlaufen einen Vollkreis). Außerdem darf man die Beträge der einzelnen mittleren Drehmomente natürlich nur dann addieren, wenn die dazugehörigen mittleren *Drehmomentvektoren* in die gleiche Richtung weisen, es sich also nicht um eine Summe aus rechts- und linksdrehenden Momenten handelt, die sich vektoriell ja voneinander subtrahieren würden! Anhand der Abb. 4-8 und der Rechten-Hand-Regel für das Vektorprodukt  $\vec{r} \times \vec{F}$  überprüft man beispielhaft leicht, dass für jede relative Position des Mondes oder der Sonne zur Erde die von diesen Himmelskörpern verursachten Drehmomentvektoren in die gleiche Richtung weisen. Daher

drehen die mittleren Einzelmomente von Mond und Sonne die Erdachse gemeinsam im Uhrzeigersinn um eine senkrecht zur Erdbahnebene stehende Achse.

Setzen wir also die Gleichung (4-27) auch zur Berechnung des von der Sonne verursachten Drehmoments an und nehmen wir ferner an, dass außer Mond und Sonne keine anderen Himmelskörper einen nennenswerten Einfluss auf die Präzessionsbewegung der Erde haben, so ergibt sich aus (4-28)

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{0.5}{J\omega_K \sin\alpha} \left( GM_M M_W \cos\alpha \frac{R^2}{r_{EM}^3} \cdot \sin\alpha + GM_S M_W \cos\alpha \frac{R^2}{r_{SE}^3} \cdot \sin\alpha \right) \\ &= \frac{5GM_W \cos\alpha}{4M_E \omega_K} \left( \frac{M_M}{r_{EM}^3} + \frac{M_S}{r_{SE}^3} \right)\end{aligned}\quad (2-29)$$

( $M_M$ : Masse der Erde,  $M_S$ : Masse der Sonne,  $r_{SE}$ : Abstand Erde-Sonne,  $r_{EM}$ : Abstand Erde-Mond).

Bei der letzten Herleitung haben wir vorausgesetzt, dass die Neigung  $\alpha$  der Erdachse gegen die Erdbahnebene um die Sonne und die Neigung der Erdachse gegen die Mondbahnebene gleich ist. Für die etwas gegen die Erdbahnebene geneigte Mondbahn gilt dies nicht exakt.

Die Masse des Äquatorwulstes kann man abschätzen, wenn man das Volumen einer Kugel mit dem Polradius der Erde vom Volumen eines Rotationsellipsoids (mit kleiner und großer Erdhalbachse) abzieht. Es resultiert  $V=9,14 \times 10^{18} \text{m}^3$ . Aus diesem Wert und der mittleren Dichte der Erde in der Nähe ihrer Oberfläche ( $\sim 2,5 \text{gcm}^{-3}$ ) folgt  $M_W=2,29 \times 10^{22} \text{kg}$ .

Die Berechnung für  $\omega$  offenbart die wahren Anteile von Mond und Sonne an der Erdpräzession:

$$\omega = 5.2 \cdot 10^{-12} \text{s}^{-1} [\text{Mond}] + 2.40 \cdot 10^{-12} \text{s}^{-1} [\text{Sonne}] = 7.6 \cdot 10^{-12} \text{s}^{-1}, \quad (2-30)$$

woraus eine Präzessionsperiode  $T$  von 26200 Jahren resultiert. Diese ist erwartungsgemäß etwas größer als die aus Beobachtungen gefolgerte Periodendauer von 25.700 Jahren. So haben wir die Anteile der Riesenplaneten noch nicht beachtet, welche die resultierende Winkelgeschwindigkeit der Erdpräzession ebenfalls vergrößern und somit eine kleinere Periodendauer ergeben.

## Eine einfache Berechnung zur Periheldrehung

Die im vorangehenden Abschnitt entwickelte Gleichung (2-29) lässt sich zur Berechnung der Periheldrehung der Erde anwenden. Wir gehen dabei in analoger Weise wie bei der Berechnung der Präzessionsbewegung vor. Wir stellen uns vor, dass an der senkrecht auf der Erdbahnebene stehenden Drehimpulsachse der jährlichen Erdbewegung ein Drehmoment angreift, welches andere Planeten im Sonnensystem verursachen.

Damit dieses Drehmoment überhaupt nennenswert ist, müssen gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllt sein: Erstens muss die Bahn des betreffenden Planeten merklich gegenüber der Erdbahn geneigt sein, denn sonst kann es gar kein äußeres Drehmoment (siehe Definition des Drehmomentes!) geben und zweitens muss der betreffende Planet relativ nahe an der Erde stehen und eine vergleichsweise große Masse besitzen, damit er eine merkliche Gezeitenkraft auf die Erdbahn ausüben kann. Wir haben natürlich als größten „Brocken“ im Planetensystem vor allem Jupiter im Visier. Um die Gleichung (2-29) auf das Problem des Erdbahnkreisels anzuwenden, müssen wir die Masse der Erde noch gedanklich über die gesamte Erdbahn verteilen und die Erdmasse anschließend, genau wie bei unserem Modell des Äquatorwulstes, je zu einem Viertel an zwei gegenüberliegenden Punkten der Erdbahn konzentrieren. Außerdem muss man für  $J$  das Trägheitsmoment eines Kreisringes einsetzen. Damit ergibt sich genau die gleiche geometrische Situation, die zur Herleitung der Gleichung (2-29) geführt hat (Abb. 4-11). Aus dieser Gleichung wird dann sinngemäß

$$\omega_P = \frac{GM_E r_{ES}^2 \cos \alpha}{2J \omega_K} \left( \frac{M_J}{r_J^3} \right) = \frac{G \cos \alpha}{2 \omega_K} \left( \frac{M_J}{r_J^3} \right) \quad (2-31)$$

( $\omega_P$ : Winkelgeschwindigkeit der Periheldrehung der Erdbahn die durch Jupiter verursacht wird,  $M_J$ : Jupitermasse,  $r_J$ : mittlerer Abstand Jupiter-Sonne,  $\omega_K$ : Winkelgeschwindigkeit der jährlichen Bahnbewegung der Erde,  $\alpha$ : Neigung der Jupiterbahnebene gegenüber der Erdbahnebene).

Setzt man die entsprechenden Zahlenwerte ein, dann ergibt sich  $\omega_P = 6,75 \times 10^{-13} \text{s}^{-1}$  und damit für  $T_P = 295000 \text{a}$  bzw. für den vom Perihel der Erdbahn pro Jahr zurückgelegten Drehwinkel  $4,4''/\text{a}$ . Damit wäre Jupiter allein bereits für etwa die Hälfte der Periheldrehung der Erde von  $10,3''/\text{a}$  verantwortlich. Prinzipiell könnten wir

zu einem genaueren Zahlenwert gelangen, wenn wir die Drehmomente der anderen Planeten zur Gleichung (4-31) hinzufügen.

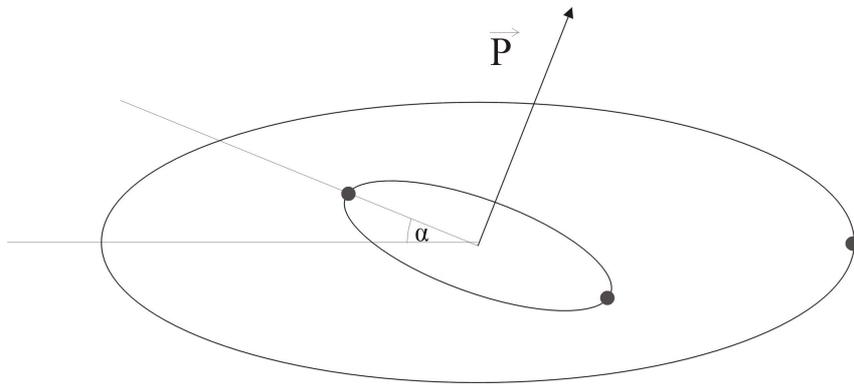


Abb. 4-11: Erd und Jupiterbahn sind um den Winkel  $\alpha$  gegeneinander gekippt. Jupiter ruft deshalb ein Drehmoment auf die als Kreisel gedachte Erdbahnebene aus.

## Die Milankowitsch-Theorie und paläoklimatische Erkenntnisse

Die Periheldrehung der Erdbahn, die Präzessionsbewegung der Erdachse oder ihr Pendeln um einen mittleren Neigungswert gegenüber der Erdbahnebene rufen augenscheinlich keine Änderungen der mittleren Solarkonstante hervor, denn die Form der Erdbahn um die Sonne wird durch diese Effekte nicht geändert. Aus diesem Grunde mutet eine Theorie, die der serbische Wissenschaftler M. Milankowitsch in den zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts äußerte, zunächst etwas befremdlich an. Milankowitsch behauptete, dass nicht nur die ohnehin geringfügige Änderung der mittleren Solarkonstante infolge der Änderung der Erdbahnexzentrizität, sondern auch die anderen Bewegungseffekte in der Lage sein könnten, den Wechsel von Eis- und Zwischeneiszeiten auszulösen, der über die letzten Jahrhunderttausende gut belegt ist. Tatsächlich wurde Milankowitschs Überlegungen zunächst keine größere Beachtung geschenkt, bis in den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts verschiedene Verfahren zur Verfügung standen, mit deren Hilfe man die Temperaturentwicklung der Erde über sehr große Zeiträume hinweg zurückverfolgen konnte. Unter diesen Verfahren ist die Analyse von Eisbohrkernen besonders zu erwähnen, die aber keineswegs die einzige derartige Methode darstellt. Einen Überblick zur Entwicklung der Milankowitsch-Theorie, der auch die neuen Entwicklungen einschließt, geben Eugen und Ilse Seibold [57].

In Eisbohrkernen – an besonders ausgewählten Stellen der Polarregionen der Erde entnommen – sind die als Schnee gefallenen Niederschläge aus vielen Zeitepochen übereinandergeschichtet. Im Wassereis eingeschlossen finden sich winzige Luftbläschen, aus denen man z. B. den Kohlenstoffdioxidgehalt während einer bestimmten Zeit ermitteln kann. Von besonderer Bedeutung für die Rekonstruktion vorgeschichtlicher Temperaturverläufe ist Verhältnis der Sauerstoffisotope  $^{18}\text{O}$  und  $^{16}\text{O}$ . Das Verhältnis dieser beiden Sauerstoffisotope ändert sich mit abnehmenden Temperaturen in den Weltmeeren zu Gunsten des  $^{18}\text{O}$  Isotops, da das  $^{16}\text{O}$  Isotops stärker in Eis eingebaut wird als das  $^{18}\text{O}$ . Aus diesem Zusammenhang kann man das Verhältnis der Sauerstoffisotope  $^{18}\text{O}$  und  $^{16}\text{O}$  als Funktion der Temperatur bestimmen.

Überraschenderweise erkennt man in den rekonstruierten Temperaturverläufen nach sorgfältiger statistischer Analyse einige der quasiperiodischen Änderungszeiten von Erdbahnparameter wieder. Die Abb. 4-12 zeigt eine solche Originalerhebung. Wie

man unschwer erkennen kann, ist es von der Datenauswertung bis zur Identifizierung einzelner Quasiperioden ein sehr langer Weg, der eine ausgefeilte Statistik erfordert. Heute steht jedoch fest, dass einzelne Milankowitsch-Perioden - etwa die Präzession - signifikant mit Änderungen der mittleren Erdtemperatur einhergehen. Welche konkreten Prozesse dabei in den Geosystemen der Erde ablaufen, ist allerdings nicht eindeutig geklärt. Außerdem ist es wahrscheinlich, dass die im Temperaturverlauf der Erde festgestellten Quasi-Perioden nicht auf einzelne Milankowitsch-Zyklen, sondern auf gemeinsame Vielfache verschiedener solcher Perioden zurückzuführen sind. Die Milankowitsch-Zyklen lösen Eiszeiten wohl nicht unmittelbar aus. Sie verstärken lediglich die in Klima ohnehin vorhandenen statistischen Schwankungen in eine ganz bestimmte Richtung.

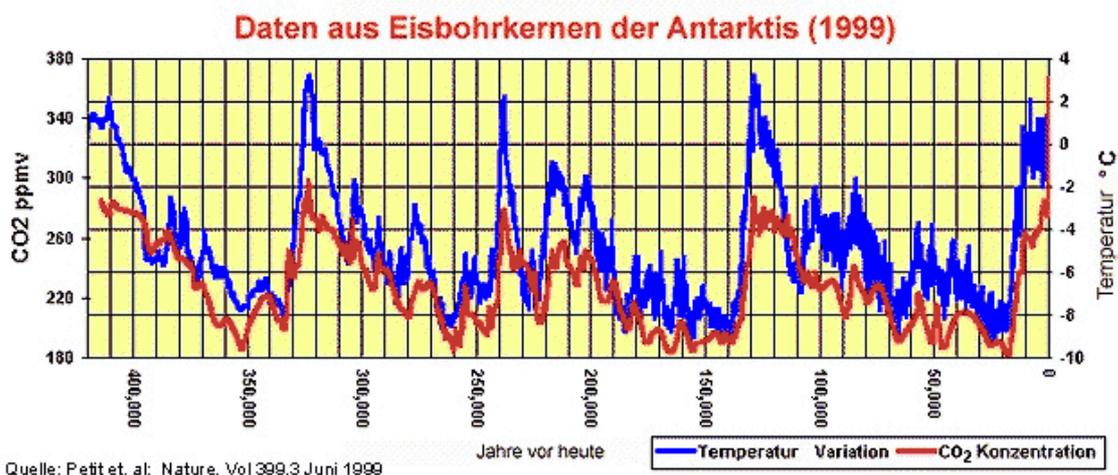


Abb. 4-12: Der CO<sub>2</sub>-Gehalt und der rekonstruierte Temperaturverlauf der Erdatmosphäre zeigen – nach sorgfältiger statistischer Auswertung – typische Milankowitsch-Zeiten.

Man hat einige der einzelnen Milankowitsch-Veränderungen aus der Tabelle 4-1 mit Eis- und Zwischeneiszeiten in Verbindung bringen können, keineswegs ist es aber so, dass im Rhythmus der Milankowitsch-Zeiten zwangsläufig immer wärmere und kältere Perioden der mittleren Erdtemperatur aufeinander folgen! Offenbar kann sich das atmosphärische System der Erde unter günstigen Umständen hinreichend effektiv nachregulieren und eine Temperaturänderung auch vermeiden. Aus der Tatsache, dass ein solches Nachregulieren jedoch nicht immer gelingt, kann man schließen, dass das Erreichen von Extrema der Erdbewegung für die Klimastabilität eine erhebliche Belastung bedeutet.

Wir haben erkannt, dass man durch die alleinige Betrachtung der Solarkonstante  $s$  nicht in der Lage ist, die klimageschichtlich festgestellten Schwankungen der mittleren Erdtemperatur infolge der veränderten Erdbewegungsparameter zu erklären. Die Solarkonstante beschreibt die außerhalb der Erde ankommende Strahlungsleistung der Sonne je Quadratmeter. Sie gibt keine Auskunft darüber, welcher Anteil dieser Strahlung zu einer Veränderung der Erdtemperatur beiträgt. Um diese Frage zu beantworten, benötigt man den Begriff des Strahlungsantriebes. Dieser Begriff ist in der Klimatologie definiert als Maß für die global gemittelten klimarelevanten Störungen des *atmosphärischen Strahlungs- und Energiehaushaltes*. Dieses Maß ist die Veränderung  $\Delta Q$  in der vertikalen Nettoeinstrahlung  $Q$  (Einheit:  $\text{Wm}^{-2}$ ) an der Obergrenze der Troposphäre, die aufgrund einer internen Veränderung oder einer externen Veränderung zustande kommen kann. Dabei ist von besonderer Bedeutung, dass Rückkopplungseffekte keine Berücksichtigung finden. Um diese Definition zu verstehen, muss man sich den Begriff des Strahlungsantriebes anhand eines einfachen Modells der Erdatmosphäre verdeutlichen. Ein solches Modell werden wir jetzt näher betrachten.

Das Ziel der folgenden Überlegungen besteht darin, die durch die Milankowitsch-Zyklen verursachten Änderungen im Strahlungsantrieb der Erde zu verstehen und diese mit anderen Strahlungsantrieben zu vergleichen.

### **Ein einfaches Atmosphärenmodell**

Ausgangspunkt für *jedes* Atmosphärenmodell ist eine Betrachtung des thermodynamischen Gleichgewichts der Erde: Die thermische solare Einstrahlung von der Sonne auf die Erde und die thermischen Ausstrahlung von der Erde in den Weltraum müssen in gleichen Zeiteinheiten auch gleich groß sein. Für ein globales Gleichgewichtsmodell müssen wir die je Sekunde auf der Querschnittsfläche  $\pi R^2$  der Erde ankommende Energie gleichmäßig auf die gesamte Erdoberfläche verteilen, mithin auf die Fläche  $4\pi R^2$  (Abb. 5-2).

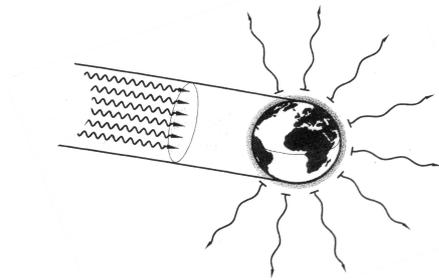


Abb. 5-2: Die auf der Querschnittsfläche der Erde ankommende Strahlungsmenge wird infolge der Erdrotation gleichmäßig verteilt und von der gesamten Erdoberfläche abgestrahlt.

Die Erde streut einen Teil der zu ihr gelangenden Sonnenstrahlung sogleich wieder ins All zurück. Das Rückstreuvermögen eines Himmelskörpers bezeichnet man als Albedo  $A$ . Die Albedo der Erde beträgt 0.3, d.h. rund 30% der Sonnenstrahlung gelangen wieder ins Weltall, ohne dass sie auf der Erdoberfläche oder in der Erdatmosphäre absorbiert werden. Berücksichtigt man diesen Effekt, so erhält man für die im Mittel je Quadratmeter und Zeiteinheit auf die Oberseite der Erdatmosphäre treffende Strahlungsenergie  $Q_0$  den Zusammenhang:

$$Q_0 = \frac{1}{4}(1 - A)s. \quad (5-1)$$

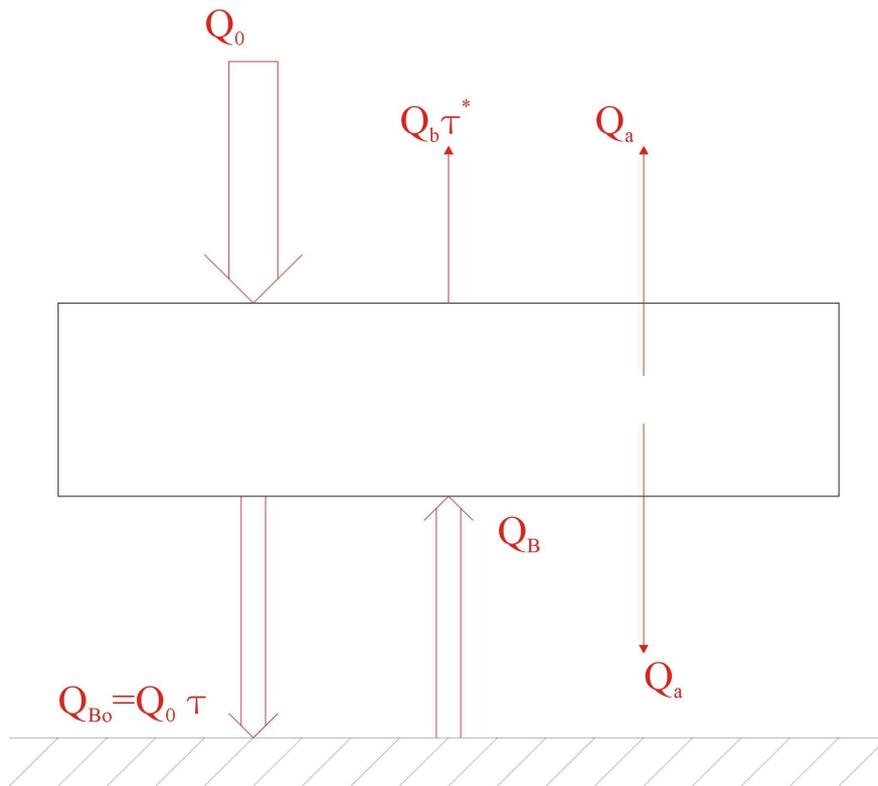


Abb. 5-3: Energieflüsse im betrachteten Atmosphärenmodell

Von  $Q_0$  kommt an der Erdoberfläche bei einem mittleren atmosphärischen Transmissionskoeffizienten für kurzwellige Strahlung  $\tau$  lediglich der Bruchteil

$$Q_{Bo} = \tau Q_0 = \frac{1}{4} \tau (1 - A) s \quad (5-2)$$

an. Der Boden seinerseits strahlt als näherungsweise schwarzer Körper mit

$$Q_B = \sigma T_B^4, \quad (5-3)$$

wobei lediglich der Bruchteil  $\tau^* Q_B$  die Oberseite der Atmosphäre erreicht ( $\tau^*$  ist in diesem Fall der Transmissionskoeffizient für langwellige Strahlung). Schließlich wird die Atmosphäre durch die in ihr absorbierte Strahlung ebenfalls aufgeheizt, weshalb sie in beiden Richtungen pro Zeit- und Flächeneinheit die Energie

$$Q_A = (1 - \tau^*) \sigma T_A^4 \quad (5-4)$$

emittiert. Im stationären Zustand müssen die ober- und unterhalb der Atmosphäre auftretenden Energiebilanzen ausgeglichen sein, was auf die beiden Zusammenhänge

$$\begin{aligned} Q_0 &= Q_A + \tau^* Q_B \\ Q_B &= Q_A + \tau Q_0 \end{aligned} \quad (5-5a, b)$$

führt. Stellt man die Gleichungen (5-5a) und (5-5b) nach  $Q_A$  um, setzt sie dann gleich und formt anschließend nach  $Q_B$  um, so erhält man

$$Q_B = \sigma T_B^4 = Q_0 \left( \frac{1 + \tau}{1 + \tau^*} \right) = \frac{1}{4} (1 - A)(1 + \tau) \left( \frac{1}{1 + \tau^*} \right) s. \quad (5-6)$$

Als Probe für die Güte dieses Modells formen wir die Gleichung (5-6) nach  $T_B$  um und prüfen, ob sie näherungsweise den richtigen Temperaturwert für die mittlere Temperatur in der Nähe der Erdoberfläche liefert. Es ergibt sich

$$T_B = \left( \frac{1}{4\sigma} (1 - A)(1 + \tau) \left( \frac{1}{1 + \tau^*} \right) s \right)^{\frac{1}{4}} = \left( \frac{0,277}{\sigma} s \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (5-7)$$

wobei wir im letzten Umformungsschritt für die Transmissionskoeffizienten die realistisch gemittelten Werten  $\tau=0,9$  und  $\tau^*=0,2$  eingesetzt haben. Man erhält für  $T_B$  einen Zahlenwert von  $\cong 286,1\text{K}$ , welcher der mittleren Erdtemperatur von  $288\text{K}$  schon recht kommt. Weitere Verbesserungen an dem hier diskutierten Modell wären leicht möglich, etwa indem man in Gleichung (5-6) durch einen Zahlenfaktor  $\cong 0,95$  berücksichtigt, dass das mittlere Emissionsvermögen der Erdoberfläche nicht exakt den Zahlenwert 1 eines schwarzen Strahlers aufweist. Nachfolgend sehen wir zugunsten prinzipieller Überlegungen von solchen verfeinernden Korrekturen ab.

Anhand der Gleichungen (5-7) kann man verdeutlichen, was der Verzicht auf die Betrachtung von Rückkopplungen in der Definition des Strahlungsantriebs bedeutet. Beispielsweise könnte es sein, dass durch eine vergrößerte Solarkonstante  $s$  mehr Wasser auf der Erde verdunstet und der erhöhte Anteil der Wolken in der Atmosphäre die Albedo merklich steigert. Dann würde trotz größerer Solarkonstante

eine Temperaturabnahme in Bodennähe eintreten. Ein Strahlungsantrieb ist also die *Ursache* einer Temperaturveränderung, er ermöglicht keine Aussagen über die *konkreten* Folgen. Solche Folgen erkennt man entweder aus Klimamodellen oder – und genau diesem Aspekt widmen wir uns – aus den durch Messung nachgewiesenen Effekten veränderter Strahlungsantriebe. Im Falle der Milankowitsch-Perioden kennen wir solche nachgewiesenen Effekte, wir wissen aber noch nicht, welche Größenordnung der Strahlungsantrieb für die einzelnen Milankowitsch-Perioden hat.

### **Abschätzungen für den Strahlungsantrieb der Milankowitsch-Perioden**

Wegen der Vernachlässigung von Rückkopplungseffekten dürfen wir zur Ermittlung des durch Veränderungen der Solarkonstante verursachten Strahlungsantriebes die Gleichung (5-1) verwenden. Für die Variation der linearen Exzentrizität der Erdbahn hatten wir (Lernmodul C) eine Variation der Solarkonstante von  $\Delta s = 1,6 \text{ Wm}^2$  ermittelt.

Daraus resultiert:

$$\Delta Q = \frac{1}{4}(1 - A)\Delta s \approx 0,3 \text{ Wm}^{-2}. \quad (5-8)$$

In unserem Atmosphärenmodell ergibt sich aus diesem Strahlungsantrieb eine Temperaturänderung von

$$\Delta T = \frac{dT}{ds} \Delta s = \frac{1}{4} \left( \frac{0,277}{\sigma} s \right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{0,277}{\sigma} \Delta s \cong 0,1 \text{ K}. \quad (5-9)$$

Doch woraus könnte der Strahlungsantrieb der anderen Milankowitsch-Perioden resultieren? Nach der Gleichung (5-1) kommt nur noch die Erdalbedo als mögliche Ursache infrage. Da wir inneratmosphärische Einflüsse nicht betrachten, kann die Veränderung der Albedo nur ein geometrischer Effekt sein. Eine Möglichkeit für einen solchen Effekt im Strahlungsantrieb zeigt die Abb. 5-4.

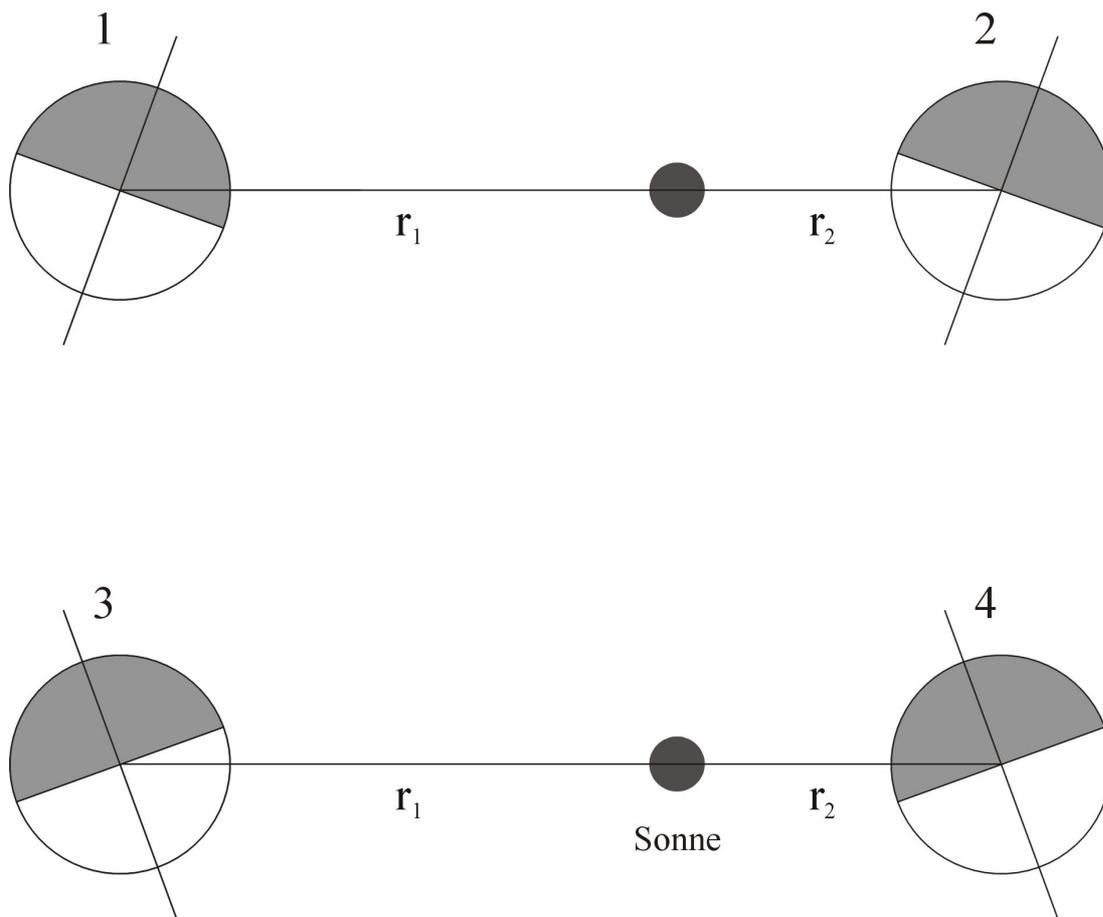


Abb. 5-4: Zur Erklärung einer möglichen Auswirkung der Erdpräzession auf die Strahlungsbilanz der Erde

Wir nehmen die Position eines raumfesten Beobachters relativ zur Sonne ein und unterstellen modellhaft, die Nord- und die Südhalbkugel der Erde hätten verschiedene Albedowerte, wobei die Trennungslinie genau am Erdäquator verlaufen soll. Tatsächlich ist ja beispielsweise die Verteilung von Land und Wassermassen auf der Erde zwischen Nord- und Südhalbkugel nicht gleichmäßig, wodurch eine solche Annahme gerechtfertigt ist.

Auf Grund der Präzession der Erdachse verschieben sich die Eintrittspunkte des Sommer- und des Winterhalbjahres entlang der Erdbahn (Bewegung des Frühlings- und Herbstpunktes entlang der Ekliptik). Im oberen Teil der Abb. 5-4 herrscht auf der Nordhalbkugel der „rechten“ Modellerde gerade Winter, sodass die Südhalbkugel mehr Sonnenstrahlung empfängt. Etwa nach Verstreichen eines halben platonischen Jahres hat sich die Situation gerade umgekehrt, nun herrscht (unteres Bild rechts) auf der Nordhalbkugel gerade Sommer. Durch die Periheldrehung der Erdbahn stimmt dieses Bild zwar nicht exakt, aber weil eine vollständige Periheldrehung der Erdbahn um  $360^\circ$  wesentlich länger als ein platonisches Jahr dauert, doch in guter

Näherung. Entscheidend ist, dass die Erde in den Positionen 1 und 4 bzw. 2 und 3 unterschiedlich weit von der Sonne entfernt ist und die Solarkonstante deshalb einer geringfügigen Änderung unterliegt.

Um einen Strahlungsantrieb, also die *Veränderung* der Sonneneinstrahlung, zu untersuchen, müssen wir die empfangenen Strahlungsmengen für die obere und die untere Situation der Erdbewegung ermitteln und miteinander vergleichen. In einfacher Näherung kann man dabei folgendermaßen vorgehen:

Wir bestimmen für die Punkte 1 und 2 der oberen Erdbahn die Werte  $Q$  für die Sonneneinstrahlung je Quadratmeter und Zeiteinheit, bilden dann das arithmetische Mittel  $Q_{12}$  aus beiden Werten und verfahren ebenso für die Punkte 3 und 4 der unteren Bahn, bilden also  $Q_{34}$ . Der Unterschied zwischen  $Q_{12}$  und  $Q_{34}$  ist dann in erster Näherung der Strahlungsantrieb, der aus den geometrischen Unterschieden der oberen und der unteren Bahnsituation resultiert:

$$\Delta Q \approx \frac{Q_1 + Q_2}{2} - \frac{Q_3 + Q_4}{2}. \quad (5-10)$$

Bezeichnen wir mit  $A_N/A_S$  diejenige *mittlere* Albedo der Erde, die wirksam ist, wenn die Erde ihre Nordhalbkugel/Südhalbkugel Richtung Sonne „neigt“ und mit  $r_1/r_2$  die entsprechenden Abstände für die Sonnenferne/Sonnennähe der Erde. Unter Berücksichtigung der Definition der Solarkonstante (Gl. 2-38) und Einbeziehung von (5-1) wird aus der Gleichung (5-10) dann

$$\begin{aligned} \Delta Q &\approx \frac{1}{8} \left( \left( \frac{(1 - A_N)L}{4\pi r_1^2} + \frac{(1 - A_S)L}{4\pi r_2^2} \right) - \left( \frac{(1 - A_S)L}{4\pi r_1^2} + \frac{(1 - A_N)L}{4\pi r_2^2} \right) \right) = \\ &\frac{L}{32\pi} \left( \frac{A_S - A_N}{r_1^2} + \frac{A_N - A_S}{r_2^2} \right) = \frac{L}{32\pi} \left( \Delta A \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (5-11)$$

(L: Leuchtkraft der Sonne).

Um die unterschiedlichen mittleren Albedo  $A_N$  und  $A_S$  abzuschätzen, nehmen wir an, dass die Rückstreuung der Sonnenstrahlung so erfolgt, dass der Einfallswinkel des Sonnenlichtes keine Rolle spielt. Sei die Albedo der nördlichen Hemisphäre  $A_1$  und

die der südlichen Hemisphäre  $A_2$ , dann lassen sich die mittleren Albedowerte  $A_N$  und  $A_S$  folgendermaßen ermitteln.

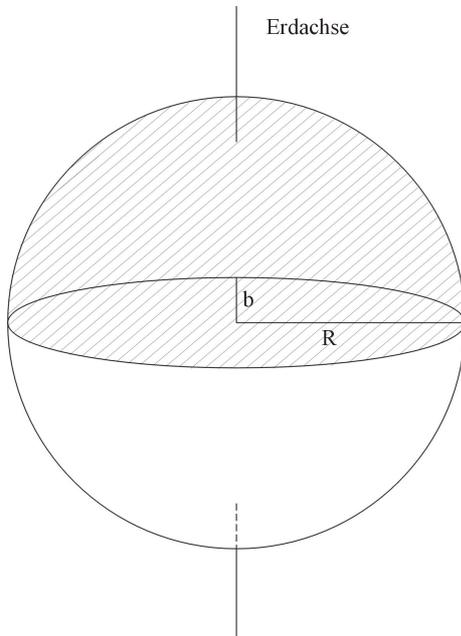


Abb. 5-5: Geometrisches Modell zur Bestimmung der Albedowerte  $A_N$  und  $A_S$

Die Abb. 5-5 zeigt die Ansicht des von der Sonne aus betrachteten Erdquerschnitts für die Situation 1 der Abb. 5-4. Bei der hier angenommen richtungsunabhängigen Rückstreuung ist die mittlere Albedo der gewichtete Mittelwert aus den beiden Teilalbedo. Die Wichtungsfaktoren sind die entsprechenden Flächenanteile. Die zur Albedo  $A_1$  gehörende Fläche  $F_1$  ist eine Summe aus dem Flächeninhalt eines Halbkreises und dem Flächeninhalt einer halben Ellipse. Die kleine Halbachse dieser Ellipse ist offenbar  $R \sin \alpha$  ( $\alpha$ : Schiefe der Ekliptik), ihre große Halbachse ist  $R$ . Damit ergibt sich für die Teilfläche  $F_1$ :

$$F_1 = \frac{1}{2} \left( \pi R^2 + \pi R^2 \sin \alpha \right) , \quad (5-12)$$

auf analoge Weise für  $F_2$

$$F_2 = \frac{1}{2} \left( \pi R^2 - \pi R^2 \sin \alpha \right) \quad (5-13)$$

und insgesamt für  $A_N$

$$A_N = \frac{\frac{1}{2}(\pi R^2 + \pi R^2 \sin \alpha) A_1 + \frac{1}{2}(\pi R^2 - \pi R^2 \sin \alpha) A_2}{\pi R^2} \quad (5-14)$$

$$= \frac{(1 + \sin \alpha) A_1 + (1 - \sin \alpha) A_2}{2}.$$

Für  $A_S$  ergibt sich durch sinngemäße Wiederholung aller Überlegungen

$$A_S = \frac{\frac{1}{2}(\pi R^2 + \pi R^2 \sin \alpha) A_2 + \frac{1}{2}(\pi R^2 - \pi R^2 \sin \alpha) A_1}{\pi R^2} \quad (5-15)$$

$$= \frac{(1 + \sin \alpha) A_2 + (1 - \sin \alpha) A_1}{2}.$$

Für die Differenz  $\Delta A = A_S - A_N$  erhält man aus (5-14) und (5-15)

$$\Delta A = \sin \alpha (A_2 - A_1). \quad (5-16)$$

Zur Berechnung des Strahlungsantriebes setzen wir in die Gleichung (5-11) als Beispiel die Werte der gegenwärtigen Erdbahn  $r_1 = 152,1 \cdot 10^6$  km und  $r_2 = 147,1 \cdot 10^6$  km ein. Damit erhält man für den Strahlungsantrieb

$$\Delta Q = 11,4 [Wm^{-2}] \cdot (A_2 - A_1) \sin \alpha. \quad (5-17)$$

Selbst wenn wir eine recht große Differenz der Albedowerte von Nord- und Südhalbkugel von 0,1 annehmen, resultiert daraus lediglich ein maximaler Strahlungsantrieb von  $\sim 0,5 Wm^2$  und damit eine Temperaturänderung in der Nähe der Erdoberfläche von  $\sim 0,1 K$ .

Mit Hilfe der Gleichung (5-17) können wir auch die Auswirkung der Schwankung der Schiefe der Ekliptik erfassen. Eine Gesamtänderung von rund  $3^\circ$  würde eine zusätzliche Änderung im Strahlungsantrieb von

$$\Delta(\Delta Q) \approx 11,4 [Wm^{-2}] \cdot (A_2 - A_1) (\sin(23,5^\circ) - \sin(23,5^\circ \pm 3^\circ)) = 0,07 [Wm^{-2}] \quad (5-18)$$

bewirken, wohlgemerkt unter der Annahme  $A_2 - A_1 = 0,1$ .

Unser geometrisches Albedomodell erklärt den Strahlungsantrieb nur dann, wenn sich die Albedowerte der nördlichen und der südlichen Erdhemisphäre unterscheiden. Dies ist für die *gegenwärtige* Erde durch die unterschiedliche Verteilung der Kontinentalflächen gegeben. Infolge der Kontinentaldrift ändert sich in geologisch sehr langen Zeiträumen diese Verteilung und der durch die Milankowitsch-Perioden gegebene Antrieb für die Entstehung von Eiszeiten kann wegfallen.

Die vorangehenden Herleitungen stützen sich zwar lediglich auf elementargeometrische Überlegungen, sind aber dennoch insgesamt recht umfangreich. Daher ist es angebracht, sich den prinzipiellen physikalischen Effekt, der diesen Herleitungen zugrunde liegt, noch einmal im Modellversuch zu vergegenwärtigen.

### **Ein Modellexperiment zur Variation des Strahlungsantriebes**

Unser Experiment nutzt den Leslie-Würfel (Abb. 5-6) als geometrisch-physikalisches Modell der Erde. *Es soll demonstriert werden, dass die Erde im Mittel trotz gleichmäßiger globaler Einstrahlung unterschiedlich erwärmt werden kann.*

Einen Leslie-Würfel, der eigentlich zur Überprüfung der Strahlungsgesetze dient, kann man bei Lehrmittelherstellern leicht beziehen. Der Leslie-Würfel besteht aus verschiedenen Oberflächenmaterialien (matt, metallisch glänzend, schwarz), die im nachfolgenden Versuch die unterschiedliche Albedo der Nord- und Südhalbkugel der Erde darstellen sollen. Der mit Wasser gefüllte Würfel besitzt eine Rührvorrichtung, außerdem eine Öffnung für ein Thermometer. Mit Hilfe von Stativmaterial kippt man den Würfel, so dass je zwei Flächen von einer Wärmestrahlungsquelle beleuchtet werden können (Abb. 5-6). Im Versuchsbeispiel wird der Würfel einmal um  $10^\circ$  und einmal um  $45^\circ$  gekippt. Die Strahlung einer in ca. 10cm Abstand zur Würfeloberfläche positionierten 250W-Heizlampe trifft dann die schwarze Oberfläche annähernd unter einem Einfallswinkel zur Flächennormale von  $10^\circ$  bzw.  $45^\circ$ , die metallische

Oberfläche unter einem Winkel von 80° bzw. 45°. Die nachfolgende Tabelle gibt die gemessene Temperaturänderung des Würfels in der Zeit an.

Kippwinkel des Würfels zur Ebene mit Thermometeröffnung	Temperatur im Würfel in °C	Bestrahlungszeit in min
45°	19	0
45°	20	2
45°	21	6
45°	22	9
45°	23	12
10°	24	14
10°	25	16
10°	26	17
10°	27	18

Tab. 5-1: Temperaturgang im Leslie-Würfel

Aus der Tabelle 5-1 entnimmt man, dass die durchschnittliche Änderung der Temperatur zunächst  $\sim 0,3\text{K}$  pro Minute, im zweiten Versuchsteil aber  $\sim 0,7\text{K}$  pro Minute beträgt. Trotz unveränderter Globalstrahlung kann die Versuchsgeometrie in Verbindung mit lokal unterschiedlichen Albedowerten der Oberfläche des bestrahlten Objektes für andere Erwärmungsraten sorgen.

Man beachte: Der hier geschilderte Versuch verdeutlicht, dass mit einer unterschiedlichen mittleren Albedo der beiden Erdhemisphären eine unterschiedliche Ausprägung der Jahreszeiten auf der Nord- und der Südhalbkugel verbunden ist. Bei einer ideal kreisförmigen Erdbahn würde das aber an der gemittelten Jahresstrahlungsbilanz nichts ändern. Um auch die Jahresstrahlungsbilanz zu ändern, müssen mindestens noch zwei weitere Effekte hinzutreten: eine elliptische Erdbahn und die Präzession der Erdachse.

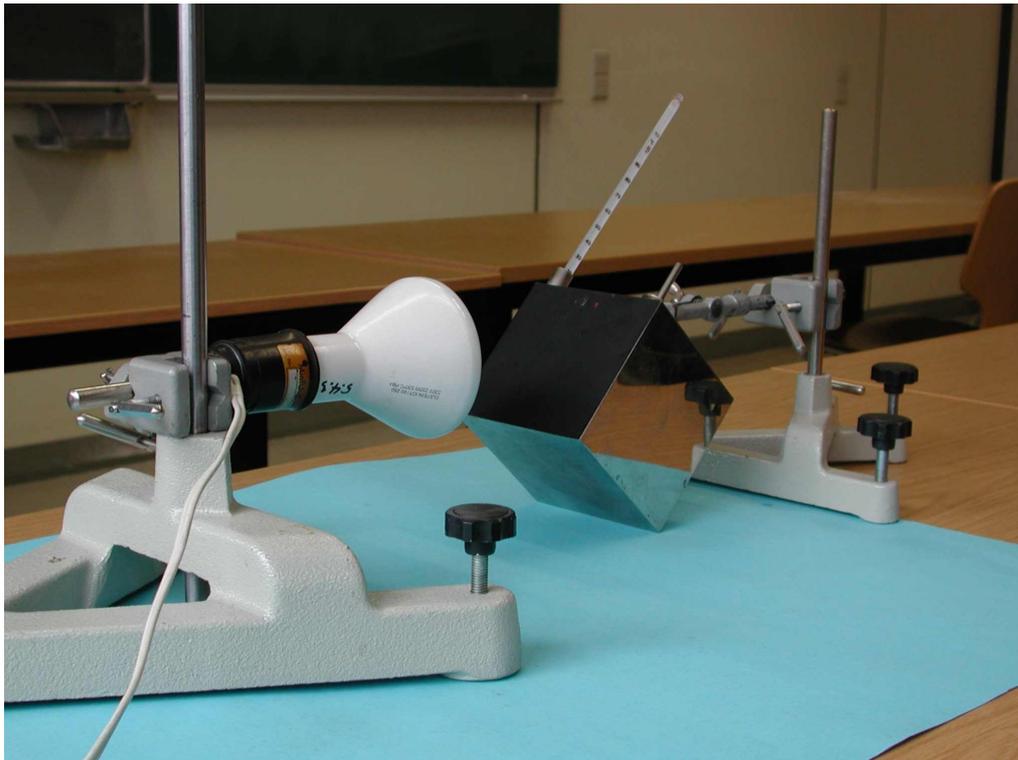


Abb. 5-6: Modellexperiment mit einem Leslie-Würfel zur Erklärung geometrischer Effekte auf die Albedo und die Strahlungsbilanz der Erde