Abb.1: Einstein-Gymnasium
Neuenhagen b. Berlin

Untersuchung der Ort-Zeit-Funktionen der Galileischen Monde zur Bestimmung astronomischer Kenngrößen auf der Grundlage experimentell ermittelter Daten

Mathis Harder

Einstein-Gymnasium Neuenhagen

Fachlehrer: Herr Hofschulz

Jugend forscht Arbeit

eingereicht am: 14.4.2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Seit Galileo Galilei im Jahr 1610 die Jupitermonde Io, Europa, Ganymed und Kallisto entdeckt hatte, wurden sie von Astronomen aus aller Welt beobachtet. Die Monde sind somit seit über 400 Jahren ein beliebtes Forschungsgebiet und folglich gut erforscht. Dennoch stehen sie nach wie vor im Fokus von Amateurastronomen. Auch mich hat es fasziniert, von der Erde aus mit einem Teleskop (ähnlich wie seiner Zeit Galileo Galilei) auf einen anderen Planeten unseres Sonnensystems zu schauen, der durchschnittlich etwa 800 Mio. km entfernt ist, und trotz der enormen Entfernung astronomische Daten mit hoher Genauigkeit bestimmen zu können. Außerdem hat mich die praktische Arbeit mit dem Teleskop gereizt und die Tatsache, dass man aus diesen einfachen Beobachtungen so viele Ergebnisse ableiten kann.
Das Ziel meiner Arbeit bestand im Wesentlichen darin, die Ort-Zeit-Funktionen der Jupitermonde zu bestimmen, um auf deren Grundlage astronomische Kenngrößen zu ermitteln. Dazu plante ich, die Monde zu fotografieren und ihre jeweiligen Abstände zu Jupiter auf den Bildern digital auszumessen. Diese Abstände sollten gegen die Zeit aufgetragen werden, um daraus die Bewegungen der Monde zu visualisieren. Ich nahm an, dass sich die Bewegungen der Monde aufgrund der Bewegungen von Erde und Jupiter nicht mit einfachen Sinusfunktionen beschreiben lassen und dass deshalb Korrekturmodelle erarbeitet werden müssen. Mit Hilfe dieser Modelle sollten astronomische Kenngrößen wie die Lichtgeschwindigkeit, die Bahnradien, die Umlaufzeiten und die Bahngeschwindigkeiten der vier Jupitermonde, sowie die Masse des Jupiters bestimmt werden.

2 Geschichte der Erforschung des Jupitersystems

Heute sind 63 Jupitermonde bekannt. Die meisten von ihnen sind mit einem Durchmesser von weniger als 10 km jedoch relativ klein. Am bedeutendsten sind die 4 größten Monde Io, Europa, Ganymed und Kallisto. Sie sind alle bereits 1610 von Galileo Galilei mit einem einfachen Linsenfernrohr entdeckt worden. Daher stammt auch ihr Name „Galileische Monde“.
Galileo hielt die Monde jedoch erst für Sterne, vor denen Jupiter vorbeiziehen würde. Erst nach mehrmaligem Beobachten Jupiters an aufeinanderfolgenden Tagen bemerkte er, dass die „Sterne“ ihre Position bezogen auf Jupiter ändern, sich allerdings mit Jupiter zusammen über das Firmament bewegen. Folglich musste es sich bei den neu entdeckten Gestirnen um Monde handeln, die Jupiter umkreisen. Das war das erste Mal, dass Monde bei einem anderen Himmelskörper als der Erde beobachtet worden sind. Nun stand fest, dass sich, anders als damals angenommen, nicht alles um die Erde dreht. Zugleich war das ein starker Beweis für das heliozentrische Weltbild und somit ein bedeutender Schritt in der Geschichte der Astronomie.
Anhand des innersten Mondes Io gelang es dem Dänen Olaf Römer gegen Ende des 17. Jahrhunderts erstmals nachzuweisen, dass das Licht eine bestimmte Zeit benötigt, um vom Jupiter zur Erde zu gelangen. Er konnte also zeigen, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist. Auf der Basis seiner Messungen konnte diese dann zu 210.000 km/s bestimmt werden, was für die damals verwendeten einfachen Methoden ein relativ genauer Wert ist.

Jedoch vor allem in den letzten Jahrzehnten wurden Jupiter und seine Monde intensiv erforscht. Es wurden nicht nur Beobachtungen von der Erde oder vom Hubble-Teleskop aus durchgeführt, sondern auch zahlreiche Sonden zur Erforschung Jupiters und seiner Monde entsandt. Die Raumsonde Galileo war 1989 die erste Sonde in Jupiters Umlaufbahn. Zuletzt wurde die Sonde Juno auf die etwa fünfjährige Reise zum Jupiter geschickt, sodass sie ihr Ziel am 4.7.2016 erreichte. Die Sonde soll unter anderem das Magnetfeld Jupiters vermessen und Daten über die Zusammensetzung Jupiters sammeln. So erhoffen sich die Forscher beispielsweise Hinweise darauf zu bekommen, ob Jupiter nur aus Gas besteht oder ob er einen festen Kern besitzt. Außerdem soll die Sonde Erkenntnisse über den Ursprung des Sonnensystems liefern.
Obwohl Jupiter und seine Monde in den letzten 400 Jahren sehr genau erforscht wurden, gibt es heute trotzdem noch viele Amateurastronomen, die die grundlegenden Erkenntnisse Galileis und Römers nachvollziehen wollen.

3 Ergebnisse und Diskussion

3.1 Datenaufnahme

Zur experimentellen Bestimmung der Ort-Zeit-Funktionen der Galileischen Monde brauchte ich möglichst viele Messwerte. Im Zeitraum vom 26.02.2016 bis zum 03.06.2016 beobachtete ich die Jupitermonde daher an insgesamt 32 Abenden, sodass ich die Bewegungen der Monde mit 3352 Bildern (von denen ich etwa 10% verwendet habe) in etwa 100 Beobachtungsstunden festhielt. Vom Tag der Opposition (wenn der Abstand von Erde und Jupiter minimal ist) am 08.03.2016 habe ich leider keine Messungen. Und in der Zeit um die Konjunktionsstellung (maximaler Abstand von Erde und Jupiter) ist es nicht möglich, Jupiter zu beobachten, da er zu dieser Zeit nur tagsüber am Himmel steht, sich also folglich zu dicht an der Sonne befindet, um beobachtet zu werden.

Abb. 2: zur Datenaufnahme verwendetes Teleskop [9] → Fremdquelle

Zur Datenaufnahme verwendete ich das Teleskop Celestron 11" (Schmidt Cassegrain, Abb. 2) mit parallaktischer GoTo Montierung (Brennweite: 2800 mm) und eine Spiegelreflexkamera (Canon EOS 50D), mit der ich die Positionen der Jupitermonde im Abstand von etwa 20 Minuten festhielt. Die Belichtungszeit passte ich jeweils an die Beobachtungsbedingungen an, da es für meine Auswertung wichtig war, zu jeder Zeit die Monde, aber auch die Strukturen auf Jupiters Oberfläche auf den Bildern zu erkennen. Als Beobachter nimmt man den Umlauf der Jupitermonde als waagerechtes Hin- und Herpendeln wahr (Abb. 4). Allerdings befinden sich die Monde nicht in einer horizontalen Ebene. Also musste ich die Bilder erst anhand der Jupitersteifen waagerecht ausrichten, bevor ich anschließend den Abstand der Monde von der Mitte Jupiters (in Pixeln) am Computer auslesen und digitalisieren konnte. Erreicht ein Mond den maximalen Abstand zu Jupiter („scheinbarer Wendepunkt“), scheint seine Bewegung vorübergehend zum Stillstand zu kommen (siehe Ganymed in Abb. 4).

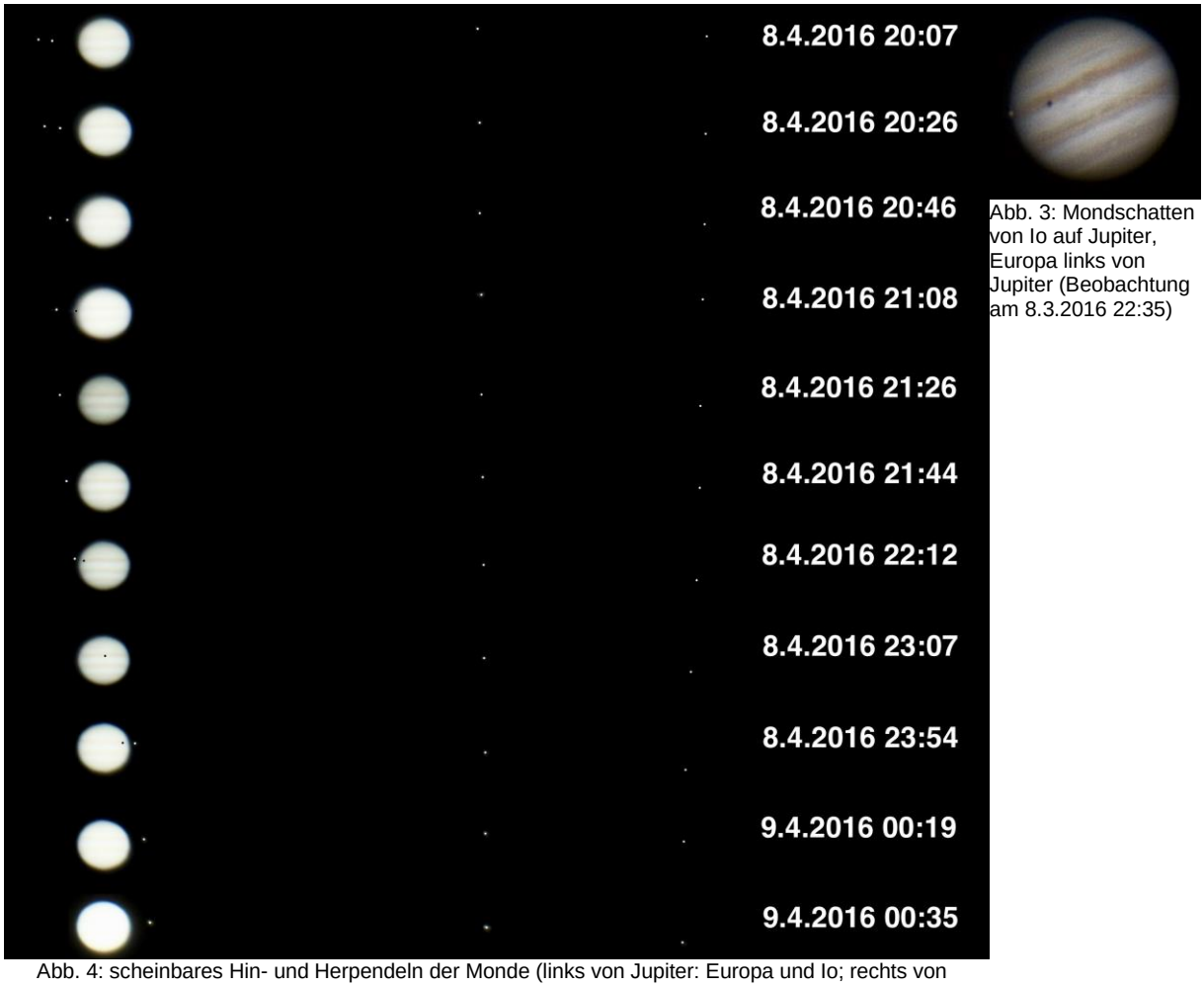

Abb. 3: Mondschatten von Io auf Jupiter, Europa links von Jupiter (Beobachtung am 8.3.2016 22:35)

Abb. 4: scheinbares Hin- und Herpendeln der Monde (links von Jupiter: Europa und Io; rechts von Jupiter: Ganymed und Kallisto)

3.2 Datenanalyse und Modellierung

3.2.1 Analyse der Rohdaten mittels Standardsinusfunktionen

Nachdem ich die Abstände der Monde vom Jupiterzentrum auf den Bildern in Pixel umgewandelt hatte, habe ich die erhaltenen Daten in Excel graphisch visualisiert. Ich versuchte, für jeden Mond eine Sinusfunktion zu finden, die den experimentellen Messwerten (Abb. 5), also den beobachteten Kreisbewegungen der Monde entspricht. Da meine ersten zusammenhängenden Daten aus dem April 2016 stammten, habe ich die Sinusfunktionen $y = a \cdot \sin(\frac{2*\pi}{P} \cdot x + d)$ für alle 4 Monde an diese Messwerte angepasst. Hierbei entspricht a jeweils dem maximalen Abstand des Mondes vom Jupitermittelpunkt in Pixeln, x ist der Zeitpunkt (Datum und Uhrzeit) der Beobachtung des jeweiligen Mondes, P entspricht der Umlaufzeit des jeweiligen Mondes und d der Verschiebung der

Sinusfunktion auf der x-Achse. Die Umlaufzeiten der Monde habe ich für diese erste Modellierung der Literatur entnommen. Die Verschiebungen d und die Radien der Mondumlaufbahnen a habe ich für jeden Mond empirisch aus meinen Messdaten ermittelt.
Über einen längeren Zeitraum betrachtet wichen jedoch die in Abb.5 exemplarisch für einen Mond dargestellten Messwerte sowohl auf der x- als auch auf der y-Achse systematisch immer weiter von den so aufgestellten Standardsinusfunktionen ab.
Im Folgenden untersuchte ich fünf mögliche Einflussfaktoren für diese Abweichungen. Dazu gehören die Exzentrizität der Umlaufbahnen der Monde, deren Bahnneigungen, der Einfluss der Beobachtungsperspektive, der Einfluss der Lichtlaufzeit (bedingt durch einen unterschiedlichen Abstand von Erde und Jupiter) sowie der Effekt der scheinbaren Verkleinerung der Jupiterscheibe und des Durchmessers der Mondumlaufbahnen mit zunehmendem Abstand zwischen Erde und Jupiter.

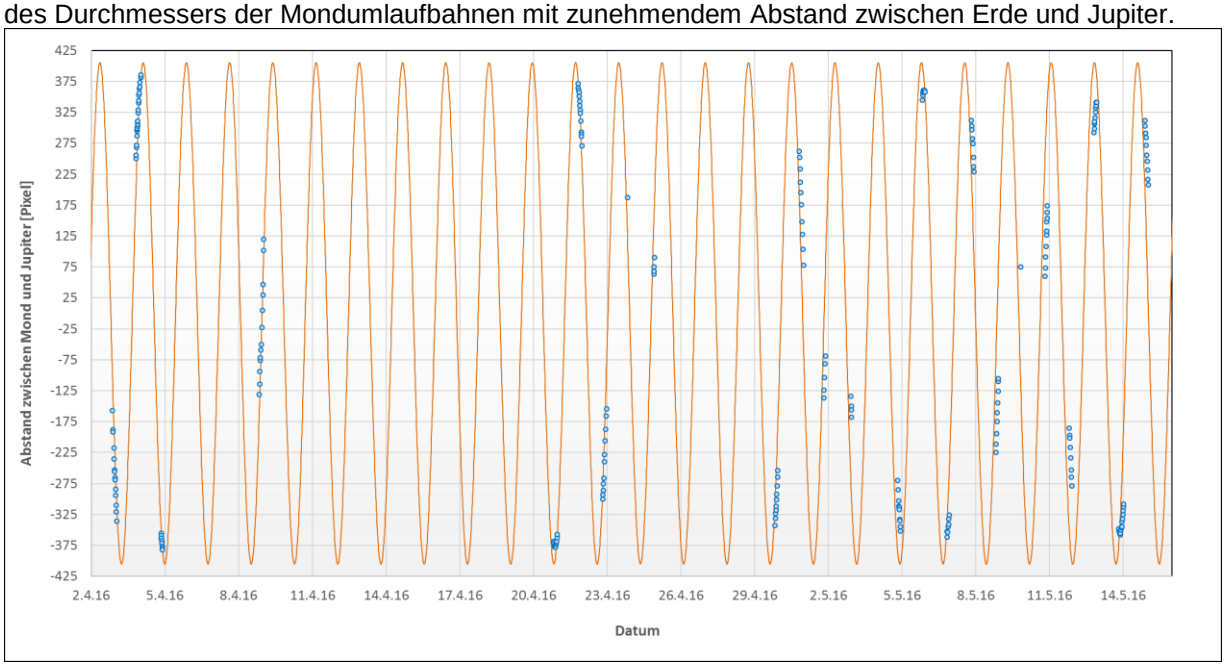

Abb. 5: systematische Abweichungen der Messwerte von der Standardsinusfunktion am Beispiel von Io (links: gute Korrelation, rechts schlechte Korrelation)

3.2.2 Bestimmung der Abweichungen vom Standardsinus

3.2.2.1 Einfluss der Exzentrizität der Umlaufbahnen der Jupitermonde

MOND	kleine Halbachse [km]	große Halbachse [km]	Mittelwert Halbachse [km]	max. Abweichung durch Exzentrität [km]	Radius [Pixel]	max. Abweichung [Pixel]	max. Abweichung [%]
Io	420.100	423.500	421.800	1.700	407	2	0,4%
Europa	664.100	677.700	670.900	6.800	646	7	1,0%
Ganymed	1.069.000	1.072.200	1.070.600	1.600	1.021	2	0,1%
Kallisto	1.869.500	1.895.800	1.882.650	13.150	1.794	13	0,7%

Tabelle 1: Einfluss der Exzentrizität

Die Exzentrizität aller betrachteten Mondumlaufbahnen ist laut Literaturwerten nur sehr gering. Die sich daraus ergebenen Abweichungen habe ich zu maximal 0,1 – 1 % berechnet (Tabelle 1) und wegen der Geringfügigkeit der sich daraus ergebenen Effekte im Folgenden vernachlässigt und vereinfacht mit kreisförmigen Umlaufbahnen gerechnet.

3.2.2.2 Einfluss der Bahnneigungen der Jupitermonde

Wie in Abbildung 4 bereits zu erkennen war, betrachtet man die Monde von der Erde aus in unterschiedlichen Ebenen. Das ist auf die Bahnneigungen der Umlaufbahnen der Monde zurückzuführen. Um herauszufinden, ob diese einen Einfluss auf die Abweichung der Messwerte von den Sinusfunktionen haben, hilft folgende Überlegung: Wenn man sich einen Mond auf seiner Umlaufbahn (bzw. einen Punkt auf einem Kreis) vorstellt und dann den Kreis gedanklich nach hinten kippt (siehe rote Ellipse in Abb. 6), ändert sich der Abstand des gedachten Punktes zur y-Achse (also seine x-Koordinate) zu keinem Zeitpunkt. Demnach ist auch der Abstand der jeweiligen Monde zur

Jupitermitte unabhängig von der Bahnneigung. Die Bahnneigungen haben somit keinen Einfluss auf die Abweichungen in x- und y-Richtung und deshalb ist eine Korrektur der Messwerte diesbezüglich nicht notwendig. Wichtig ist jedoch, bei der Digitalisierung der Messwerte bei den Fotos darauf zu achten, dass immer die gleiche Ausrichtung der Messebene eingehalten wird. Das habe ich, wie bereits oben erwähnt, anhand der waagerechten Ausrichtung aller Bilder mittels der Streifen auf dem Jupiter realisiert.

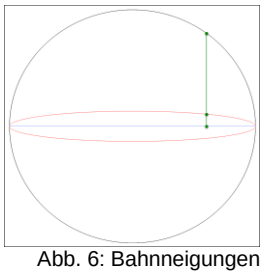

Abb. 6: Bahnneigungen

3.2.2.3 Einfluss der Beobachtungsperspektive

Erde und Jupiter bewegen sich beide um die Sonne. Allerdings ist der Bahnradius der Erde wesentlich kleiner als der Bahnradius des Jupiters. Daher hat die Erde eine wesentlich größere Bahngeschwindigkeit als Jupiter. Das heißt, dass sich die Perspektive auf das System des Jupiters und seiner Monde von der Erde aus ständig verändert (siehe Abb. 7a/b).

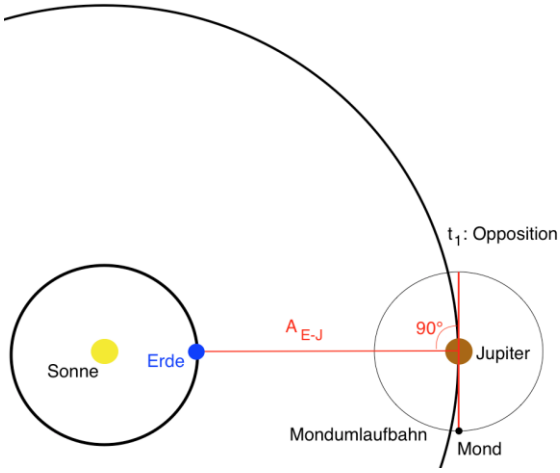

Abb. 7a: Erde und Jupiter in Oppositionsstellung (t_1)

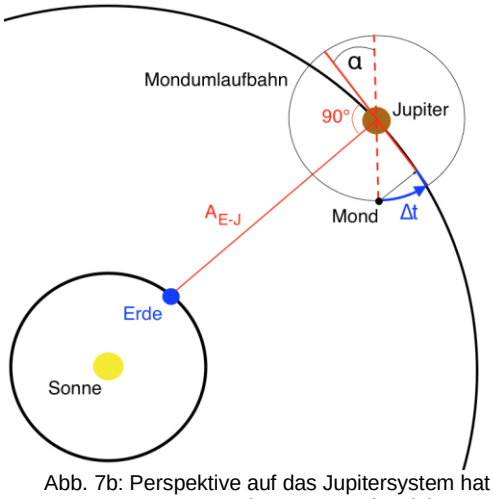

Abb. 7b: Perspektive auf das Jupitersystem hat sich von der Erde aus verändert (t_2)

In Abbildung 7a ist die Oppositionsstellung zwischen der Erde und dem Jupitersystem dargestellt. Nach einiger Zeit hat sich sowohl die Erde als auch der Jupiter bewegt (Abb. 7b). Verglichen mit der Oppositionsstellung erscheint der Wendepunkt eines jeden Mondes dann entsprechend des Winkels α früher bzw. später, da man aus einem anderen Winkel auf das Jupitersystem blickt. Der Winkel α lässt sich für jeden Mond in Abhängigkeit von seiner Umlaufzeit in eine Zeitverzögerung umrechnen, nach der der Mond im Vergleich zur Oppositionsstellung an einem beliebigen Punkt beobachtet wird. Die Zeitdifferenz habe ich nach Gleichung 1 unter Zuhilfenahme der trigonometrischen Beziehungen aus Abbildung 8, den Umlaufzeiten der Monde und den Gleichungen 2-12 berechnet.

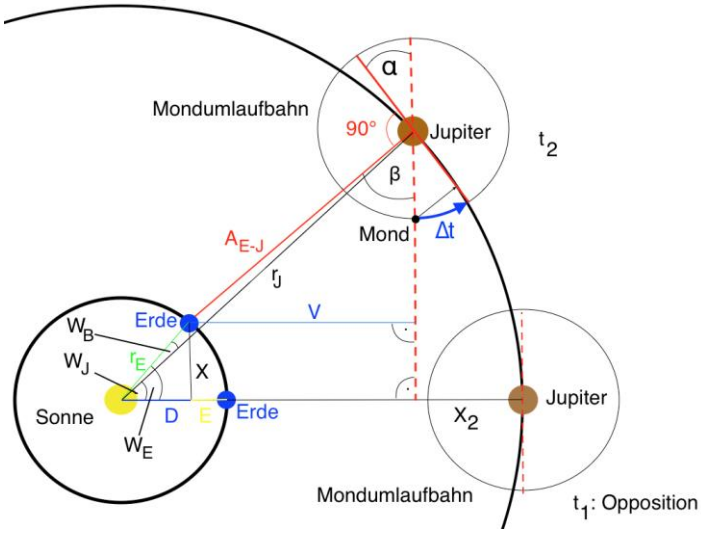

Abb. 8: trigonometrische Beziehungen zur Ermittlung von α

$\Delta t_p = \alpha \cdot \frac{T_{Mond}}{360°}$ <Gleichung 1>

$\alpha = 90° - \beta$ <Gleichung 2>

$\beta = arcsin(\frac{V}{A_{E-J}})$ <Gleichung 3>

$A_{E-J} = \sqrt{(r_E^2 + r_J^2) - 2 \cdot r_E \cdot r_J \cdot \cos(W_B))}$ <Gleichung 4>

$W_B = W_E - W_J$ <Gleichung 5>

$V = r_J - r_E - X_2 + E$ <Gleichung 6>

$E = r_E - D$ <Gleichung 7>

$D = r_E \cdot \cos(W_B)$ <Gleichung 8>

$X_2 = r_J - r_J \cdot \cos(W_J)$ <Gleichung 9>

$W_J = \frac{d \cdot 360°}{T_J}$ <Gleichung 10>

$W_E = \frac{d \cdot 360°}{T_E}$ <Gleichung 11>

$d = D_a - D_O$ <Gleichung 12>

r_E: Radius der Erdumlaufbahn; r_J: Radius der Umlaufbahn von Jupiter; T: Umlaufzeit; D_O: Oppositionsdatum (8.3.2016); D_a: Datum, für das die Zeitdifferenz berechnet werden soll

3.2.2.4 Einfluss der Lichtlaufzeiten

Mit der Bewegung der Erde und des Jupiters ändert sich zusätzlich ständig ihr Abstand (A_{E-J} in Abb. 7a/b) zueinander, was außerdem dazu führt, dass das Licht eine andere Strecke zurücklegen muss, wofür eine andere Zeit benötigt wird. Dadurch kommt es zu einer weiteren Korrekturnotwendigkeit auf der Zeitachse.
Die Abstandsänderungen habe ich nach Gleichung 16 in die zu jedem Beobachtungszeitpunkt zugehörigen Zeitdifferenzen Δt_c umgerechnet.

$\Delta t_c = t_1 - t_0$ <Gleichung 13>

$t_n = \frac{A_{E-J}}{c}$ <Gleichung 14>

$t_0 = \frac{r_J - r_E}{c}$ <Gleichung 15>

$\Delta t_c = \frac{A_{E-J}}{c} - \frac{r_J - r_E}{c}$ <Gleichung 16>

t_n: Zeit, die das Licht zu einem beliebigen Zeitpunkt (wie in Abbildung 8 beispielsweise t_2) benötigt, um vom Jupiter zur Erde zu gelangen; t_0: Zeit, die das Licht benötigt, um in Oppositionsstellung vom Jupiter zur Erde zu gelangen; c : Lichtgeschwindigkeit Δt_c: Zeitunterschied, bedingt durch unterschiedliche Abstände zwischen Erde und Jupiter

Bis hier lässt sich festhalten, dass die wesentlichen Korrekturen der Rohdaten auf der Zeitachse durch den Effekt der unterschiedlichen Perspektive (Δt_p) und durch den Effekt der unterschiedlichen Lichtlaufzeiten (Δt_c) erfolgen müssen. Dabei ist zu beachten, dass Δt_c und Δt_p in Abhängigkeit von bestimmten Zeitintervallen entweder additiv oder subtraktiv zur gesamten zu korrigierenden Zeitdifferenz Δt führen, je nachdem, wie die Gestirne zueinander stehen. $\Delta t = \Delta t_p \pm \Delta t_c$ <Gleichung 17>
Wie man in Abb. 9 sieht, ist der Einfluss der sich ändernden Beobachtungsperspektive Δt_p deutlich größer als der Einfluss des sich ändernden Abstandes und der sich dadurch ändernden Lichtlaufzeit Δt_c.

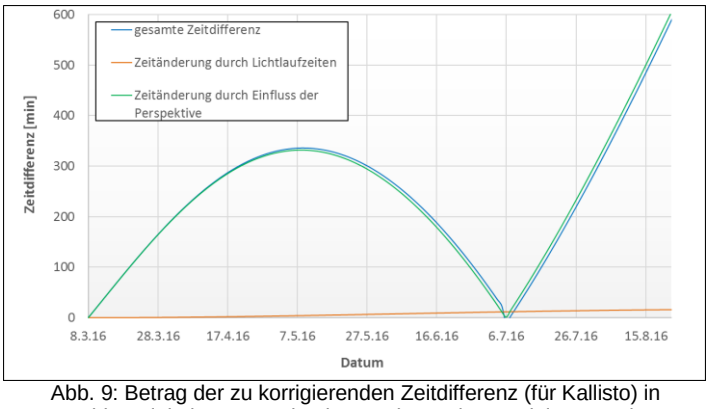

Abb. 9: Betrag der zu korrigierenden Zeitdifferenz (für Kallisto) in Abhängigkeit vom Beobachtungsdatum (Perspektiven- und Lichtlaufzeiteffekt)

Abb. 9b zeigt die Summe des Einflusses des Perspektiveneffekts und des Einflusses der unterschiedlichen Lichtlaufzeiten in Abhängigkeit vom Beobachtungsdatum in einem wesentlich größeren Intervall als in Abbildung 9. Bei Beobachtungen über mehrere Jahre treten für Kallisto, den Mond mit der größten Umlaufbahn, sogar Abweichungen (auf der x-Achse) von bis zu fast 200 Stunden auf.

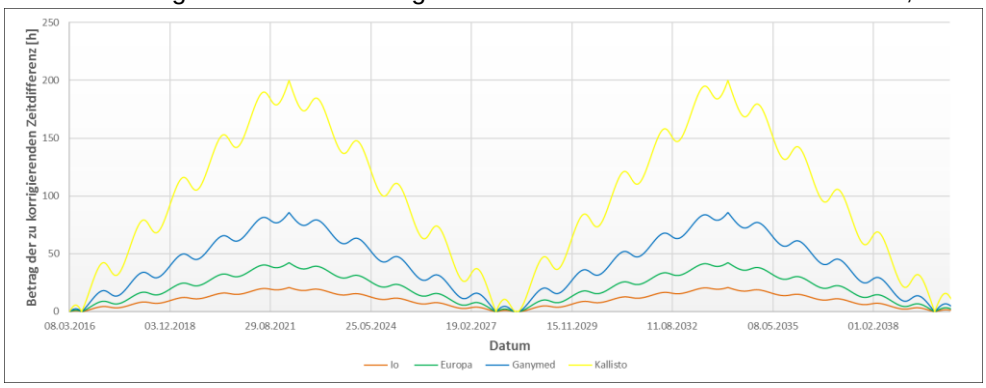

Abb. 9b: Betrag der zu korrigierenden Zeitdifferenz (für alle Monde) in Abhängigkeit vom Beobachtungsdatum (Summe aus Einfluss durch Perspektiven- und Lichtlaufzeiteffekt)

3.2.2.5 Abstandseffekt

Der sich ständig ändernde Abstand von Erde und Jupiter bewirkt jedoch nicht nur Abweichungen der Messwerte von den Standardsinusfunktionen (aus Kapitel 3.2.1) auf der x-Achse, sondern ist gleichzeitig auch der Grund für deren Abweichungen auf der y-Achse.
Je weiter sich ein Betrachter von einem Objekt entfernt, desto kleiner erscheint es ihm schließlich. Daher scheinen auch die Umlaufbahnen der Monde, aus größerer Entfernung betrachtet, zu „schrumpfen“. Daraus ergab sich die Notwendigkeit, für jeden Messwert einen Faktor zur Korrektur dieser scheinbaren Verkleinerung zu finden. Dies versuchte ich auf drei verschiedenen Wegen.

Als Erstes analysierte ich den scheinbaren Durchmesser des Jupiters (in Pixeln) unter Verwendung aller experimentellen Daten als Maß der scheinbaren Verkleinerung. Dafür trug ich in einem Diagramm den gemessenen Durchmesser der Jupiterscheibe gegen den Abstand zwischen Erde und Jupiter auf (Abb. 10). Aus diesen Werten bestimmte ich eine lineare Funktion (im Diagramm blau dargestellt), die den scheinbaren Durchmesser Jupiters, aufgetragen über den Abstand „Erde-Jupiter“ darstellt. Allerdings habe ich Jupiter während der Datenaufnahme an leicht bewölkten Tagen oftmals überbelichtet, weshalb ich den Durchmesser dann nicht mehr ausreichend genau bestimmen konnte. Daher ist die Streuung der Messwerte sehr hoch. Das heißt, dass die Funktion relativ ungenau ist (ihr Korrelationskoeffizient liegt etwa bei 0,8) und sich somit nicht zum Korrigieren der Abstände der Monde zum Jupitermittelpunkt eignet.
Daher musste ich die Funktion anders bestimmen. Um eine höhere Genauigkeit zu erhalten, bestimmte ich daher den Durchmesser der Umlaufbahnen der Monde (in Pixeln) zu verschiedenen Zeiten. Diesen gemessenen Durchmesser setzte ich zu den (den Literaturwerten entnommenen) tatsächlichen Durchmessern der jeweiligen Mondumlaufbahnen und dem Literaturwert des tatsächlichen Durchmessers von Jupiter ins Verhältnis, um so indirekt den scheinbaren Durchmesser Jupiters (in Pixeln) zu berechnen (Gleichung 18).

$$d_{\text{Jupiter [Pixel]}} = \frac{d_{\text{Mondbahnradius [Pixeln]}} \cdot d_{\text{Jupiter[km]}}}{d_{\text{Mondbahnradius [km]}}} \qquad \text{<Gleichung 18>}$$

Die so indirekt über den Durchmesser der Mondumlaufbahnen bestimmten Durchmesser der Jupiterscheibe (in Pixeln) trug ich anschließend in demselben Diagramm (Abb. 10, rot markiert) gegen den Abstand zwischen Erde und Jupiter auf. Die daraus bestimmte Funktion zeigt mit hoher Korrelation (0,99) einen linearen Zusammenhang zwischen dem scheinbaren Durchmesser der Jupiterscheibe (in Pixeln) und dem Abstand (Erde-Jupiter). Die höhere Genauigkeit resultiert aus dem 6-27fach größeren Durchmesser der Mondumlaufbahnen im Vergleich zum Durchmesser der Jupiterscheibe.

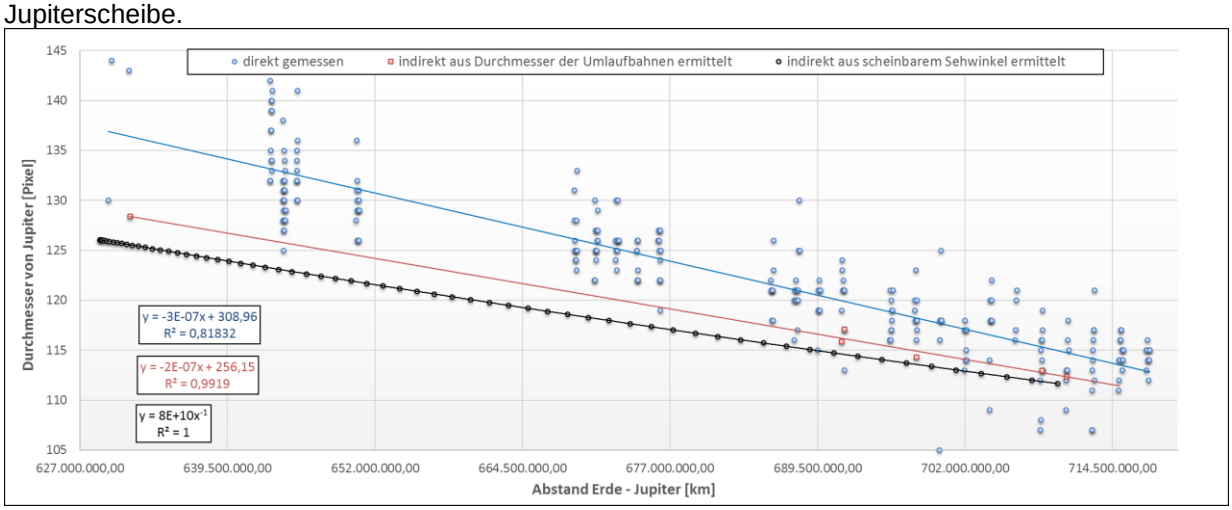

Abb. 10: scheinbarer Durchmesser von Jupiter [Pixel] in Abhängigkeit vom Abstand von Erde und Jupiter

In dem betrachteten Abstandsintervall (in Abb. 12 durch gestrichelte rote Linien gekennzeichnet) ist die lineare Betrachtung auch eine gute Näherung. In einem größeren Intervall stimmt dies jedoch nicht mehr. Dann muss die scheinbare Verkleinerung exponentiell betrachtet werden. Um diesen Zusammenhang genau zu ermitteln, habe ich den scheinbaren Sehwinkel Alpha für verschiedene Entfernungen (A) bestimmt (siehe Abb. 11).

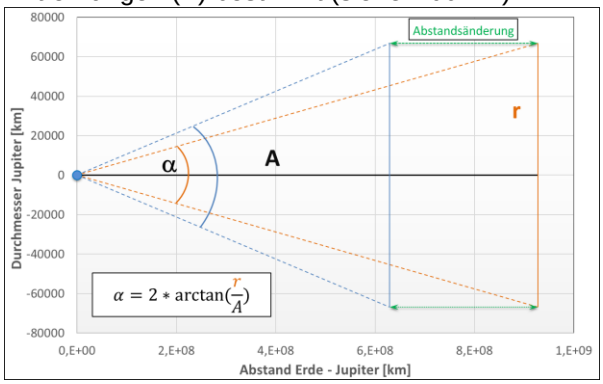

Abb. 11: scheinbarer Sehwinkel von Jupiter in Abhängigkeit vom Abstand (Erde – Jupiter)

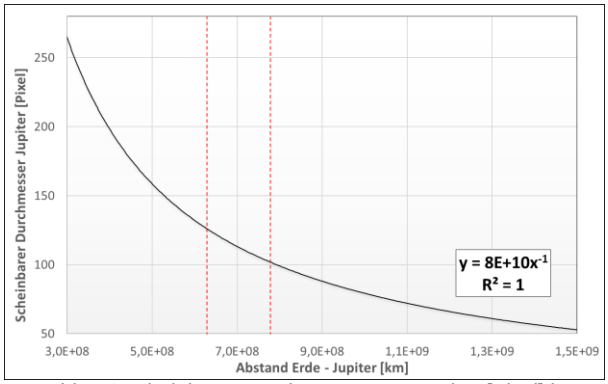

Abb. 12 scheinbarer Durchmesser von Jupiter [Pixel] in Abhängigkeit vom Abstand (Erde – Jupiter)

Für diese Rechnung entnahm ich den Radius Jupiters (r) der Literatur. Den Abstand A berechnete ich in Abhängigkeit vom Datum unter Zuhilfenahme des in Kapitel 3.2.2.3 beschriebenen Modells (Gleichung 4). Mit Hilfe dieser Funktion (Abb. 12, bzw. die schwarze Kurve in Abb. 10) konnte ich nun alle meine y-Werte der Mondumlaufbahnen mit hoher Zuverlässigkeit (r^2=1,0) korrigieren. Eine ähnliche Genauigkeit hätte sich allerdings auch mit den experimentell bestimmten Daten ergeben (rote Kurve in Abb. 10).
Abbildung 12b zeigt, um wie viele Pixel die Umlaufbahnen, in Abhängigkeit vom Beobachtungsdatum, (aufgrund des sich ändernden Abstandes Erde-Jupiter) kleiner erscheinen. Könnte man während der Konjunktionsstellung die Monde beobachten, so würden die Messwerte des Mondes Kallisto sogar um fast 600 Pixel von ihrer Sinusfunktion abweichen.

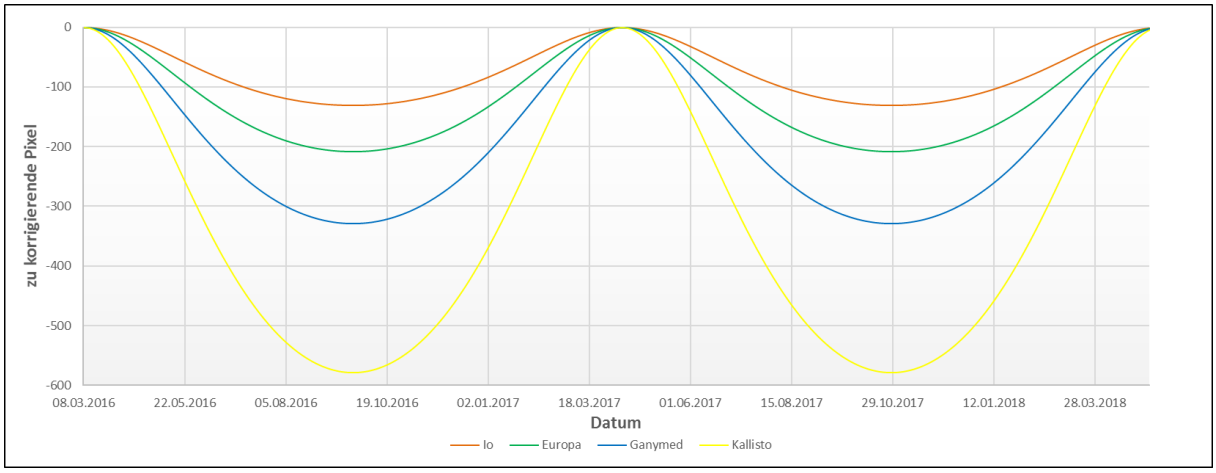

Abb. 12b: Aufgrund des Abstandes (Erde-Jupiter) entstehende Abweichungen der Messwerte von der y-Achse in Abhängigkeit vom Beobachtungsdatum

Die Tabelle 2 gibt eine Zusammenfassung der in Kapitel 3.2.2 beschriebenen Korrekturnotwendigkeiten bezogen auf die 5 untersuchten Haupteffekte bei der Beobachtung des Jupitersystems von der Erde.

PARAMETER	Einfluss des Parameters	
	auf x (Zeit)	auf y (Amplitude)
Exzentrizität	sehr klein (<1%)	kein Einfluss
Bahnneigung	kein Einfluss	kein Einfluss
Perspektive	sehr groß	kein Einfluss
Lichtlaufzeit	gering	kein Einfluss
Abstandseffekt	kein Einfluss	sehr groß

Tabelle 2: Übersicht des Einflusses der 5 Hauptparameter auf die Notwendigkeit von Korrekturen auf der Zeitachse (x) und bezüglich der Amplitude (y)

3.2.3 Modellierung angepasster Funktionen

3.2.3.1 Sinusmodell bei Datenfixierung auf Opposition

Es lässt sich also festhalten, dass die Messwerte nur aufgrund des Perspektiveneffektes und der sich ändernden Lichtlaufzeiten auf der x-Achse von den Standardsinusfunktionen (Abb. 5 aus Kapitel 3.2.1) abweichen, wobei der Einfluss der Perspektive wesentlich größer ist. Außerdem konnte ich die scheinbare Verkleinerung von Objekten in größeren Entfernungen als einzigen Grund für die Abweichungen der Messwerte auf der y-Achse ausmachen. Mit den oben erklärten Rechnungen habe ich die x- und die y-Werte meiner Messwerte bzw. meiner Funktionen korrigiert.
In der ersten Betrachtung werden nun Erde und Jupiter während der Opposition (am 8.3.2016) „eingefroren“. Das so gewonnene Modell zeigt dann, wie man die Bewegungen der Jupitermonde von der Erde aus wahrnehmen würde, wenn weder Erde noch Jupiter sich bewegen würden. Abbildung 13 zeigt dies exemplarisch am Beispiel von Io.
Hierzu korrigierte ich dem Datum entsprechend, wie im vorherigen Kapitel beschrieben, alle meine ***Messwerte*** auf der x- sowie auf der y-Achse (für jeden Mond). Nach der Korrektur lagen die Messwerte der jeweiligen Monde genau auf den jeweiligen Standardsinusfunktionen. Diese Funktionen zeigen zwar nicht die tatsächlich beobachtbaren Positionen der Jupitermonde, dennoch eignen sie sich gut zum Rechnen, da die Positionen der Jupitermonde in klar definierten und relativ einfach zu parametrisierenden Standardsinusfunktionen abgebildet werden.

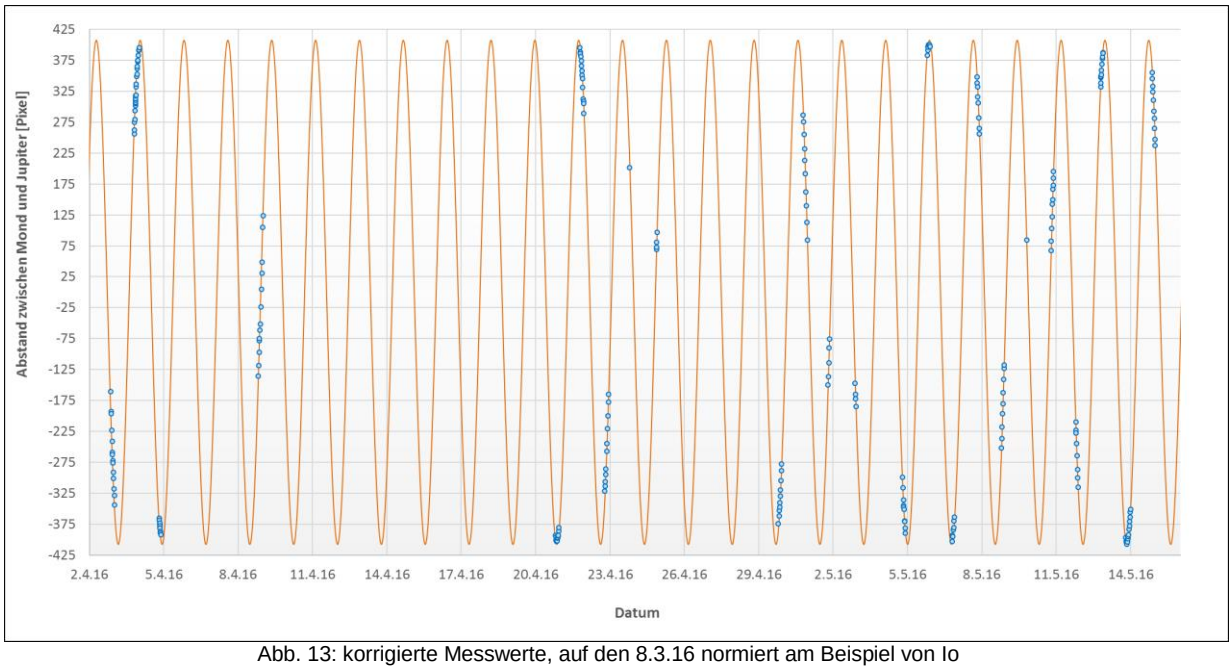

Abb. 13: korrigierte Messwerte, auf den 8.3.16 normiert am Beispiel von Io

3.2.3.2 Modellierung der oszillierenden Realfunktionen

Bei diesem Modell korrigierte ich die experimentell ermittelten Messwerte (Zeit und Amplitude) der Jupitermonde nicht. Stattdessen generierte ich eine Funktion, die die Erwartungswerte (in x und y) für die in der Realität zu beobachtenden Positionen der Jupitermonde zu jedem Zeitpunkt darstellt. Dazu ging ich von der Standardsinusfunktion aus und korrigierte dem Datum entsprechend sowohl ihre ***x- als auch ihre y-Werte*** unter Verwendung der zuvor beschriebenen mathematischen Zusammenhänge. Wie in Abbildung 14 exemplarisch am Beispiel von Io dargestellt, liegen die nicht korrigierten Messwerte (Rohdaten) über lange Beobachtungszeiträume sowohl in x- als auch in y-Richtung nun perfekt auf dieser Funktion. Es entstand eine sinusähnliche Funktion, deren Amplitude und Periode nicht konstant sind, sondern sich in Abhängigkeit von der Position von Erde und Jupiter periodisch ändern. Von der Oppositionsstellung zwischen Erde und Jupiter ausgehend, schrumpft die Amplitude dieser Funktion in der Konjunktionsstellung zwischen Erde und Jupiter auf etwa 67%. Außerdem ergibt sich je nach Konstellation der Gestirne eine Streckung bzw. eine Stauchung der Funktion auf der x-Achse. Mit Hilfe dieses Funktionstyps lassen sich nun alle tatsächlich zu beobachtenden Positionen der Jupitermonde genau vorhersagen und darüber hinaus lassen sie sich in Zeiträume extrapolieren, in denen eine experimentelle Beobachtung nicht möglich ist (z.B. Konjunktionsstellung zwischen Erde und Jupiter, tagsüber, wolkenreicher Himmel).

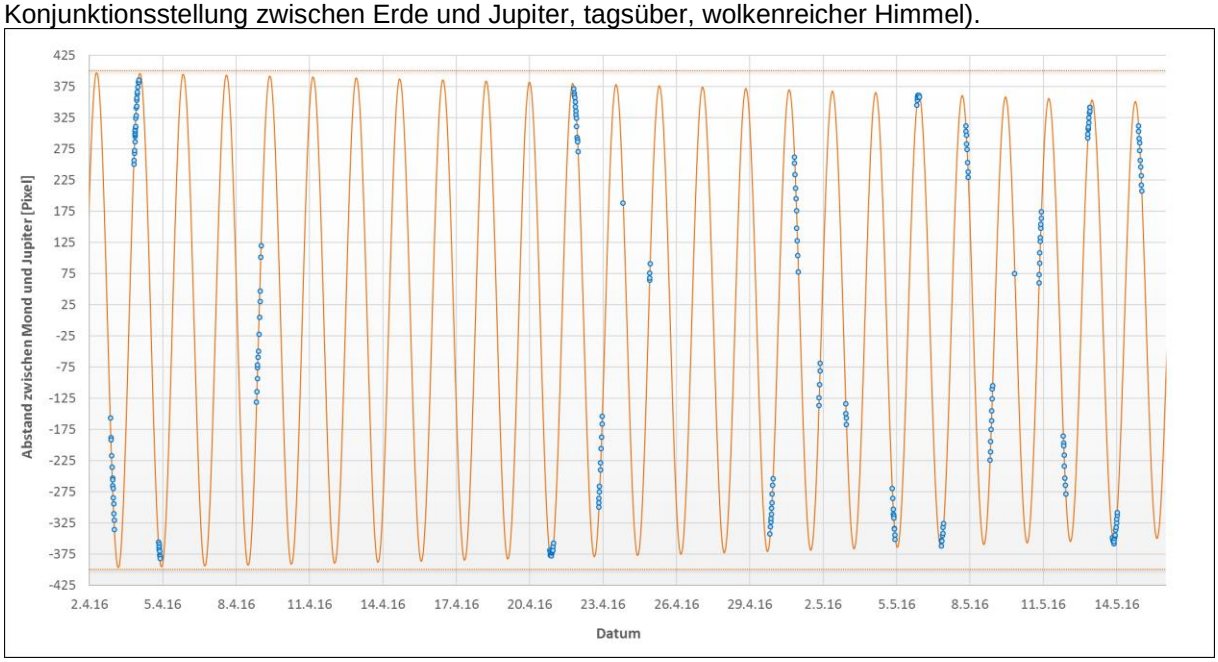

Abb. 14: oszillierende Realfunktion am Beispiel von Io (Messwerte blau dargestellt)

3.2.3.3 Bestimmung scheinbarer Wendepunkte

Mit Hilfe der in den vorigen Kapiteln generierten Funktionen lassen sich die Zeitpunkte von Ereignissen, wie beispielsweise die von scheinbaren Wendepunkten oder Verfinsterungen der Monde, relativ genau bestimmen. Ich habe die Zeiten (x-Werte) der Wendepunkte der Monde (maximale Auslenkung der Sinusfunktion) folgendermaßen bestimmt:

$x = \frac{\arccos(0) - \mathrm{d}}{b} + k \cdot \frac{\pi}{b}$ $\quad k \in \mathbb{N}$ <Gleichung 19>

Die sich daraus ergebenden Zeiten habe ich anschließend unter Berücksichtigung der Perspektive und der Lichtlaufzeiten korrigiert.

Die Tabelle (3) zeigt dies exemplarisch für einige tatsächlich beobachtete und berechnete Zeiten der scheinbaren Wendepunkte der Monde.

Mond	Beobachtung	Vorhersage	Abweichungen	
			in Minuten	in Pixel
Io	20.04.16 21:04	20.04.16 21:02	2	0
	13.05.16 21:06	13.05.16 21:03	3	0,02
Europa	11.05.16 20:20	11.05.16 20:27	7	0,02
Ganymed	14.05.16 21:34	14.05.16 20:35	59	0,7
Kallisto	10.05.16 21:02	10.05.16 23:22	140	1,22

Tabelle 3: Zeitpunkte von scheinbaren Wendepunkten

Die Wendepunkte von Io und Europa konnte ich aufgrund der kleinen Umlaufbahnen der Monde auf wenige Minuten genau vorhersagen und auch experimentell bestätigen. Für Ganymed und Kallisto scheinen die zeitlichen Abweichungen zwischen Beobachtung und Vorhersage der Wendepunkte relativ groß zu sein. Dies liegt an der Größe der Umlaufbahnen der Monde und den davon abhängigen Bahngeschwindigkeiten. Wie aus Tabelle 3 hervorgeht, sind die Bewegungen dieser Monde in der Nähe ihrer Wendepunkte mit der von mir verwendeten Technik kaum aufzulösen. Man kann das durch eine Überschlagsrechnung schnell erklären: Im Bereich eines Wendepunktes von Kallisto vergehen beispielsweise etwa 5 Stunden, um auf der y-Achse eine Entfernung von 3 Pixeln (was etwa der experimentellen Nachweisgrenze meines Versuchsaufbaus entspricht) zurückzulegen. Bei Ganymed ist es ähnlich, 3 Pixel werden im Bereich eines Wendepunktes in etwa 3 Stunden zurückgelegt. Experimentell ist das am Beispiel von Ganymed auch in Abbildung 4 zu sehen, wo ich über einen Zeitraum von 4,5 Stunden einen scheinbaren Stillstand von Ganymed experimentell dokumentiert habe.

3.3 Bestimmung von Kenngrößen anhand des Jupitersystems

3.3.1 Bahnradius, Umlaufzeit und Bahngeschwindigkeit der Monde

Die Wendepunkte der Monde zu beobachten, ist notwendig, um die Radien der Umlaufbahnen der Monde (in Pixeln) zu bestimmen. Um die gemessenen Radien der Mondumlaufbahnen von Pixeln in Kilometer umzurechnen, nutzte ich die Formel $r = A \cdot \tan(\frac{\alpha}{2})$, wobei α der scheinbare Sehwinkel der Umlaufbahnen ist, A der Abstand von Erde und Jupiter während der Oppositionsstellung (als bekannt angenommen) und r der gesuchte Radius der Mondumlaufbahnen (in km) (Abb. 11). Da α auch nicht bekannt ist, führte ich zu dessen Berechnung ein zusätzliches Experiment durch: Ich fotografierte eine Keramikkugel im Abstand von etwa 80 Metern mit derselben Kamera und demselben Teleskop, was ich zur Beobachtung der Jupitermonde nutzte. Da ich die Entfernung zwischen der Kamera und der Kugel, sowie den Radius der Kugel messen konnte, konnte ich auch den scheinbaren Sehwinkel, unter dem die Kugel zu beobachten ist, berechnen. Am Computer bestimmte ich nun den Durchmesser der Kugel in Pixeln. Der scheinbare Sehwinkel eines Objektes ist direkt proportional zu dessen Durchmesser in Pixeln auf dem Foto. Durch Einbeziehung der Daten dieses Experimentes konnte ich den scheinbaren Sehwinkel der Mondumlaufbahnen also mit der folgenden Verhältnisgleichung berechnen: $\alpha_1 = \frac{d_1 \cdot \alpha_2}{d_2}$ <Gleichung 20>

Hier ist d_1 der Durchmesser der Mondumlaufbahnen (in Pixeln), α_1 deren scheinbarer Sehwinkel, d_2 ist der Durchmesser der Kugel (in Pixeln) und α_2 deren scheinbarer Sehwinkel. Aufgrund der Größenunterschiede (Radius der Kugel: ca. 3 cm, Radius der größten Umlaufbahn: ca. 1,8 Mio. km) hat diese Rechnung zwar einen gewissen Fehler, ermöglicht aber grundsätzlich überhaupt eine Berechnung der gewünschten Daten mit einem relativ einfachen Zusatzexperiment.

Die Umlaufzeiten der Monde habe ich auf zwei verschiedenen Wegen bestimmt: zum einen experimentell aus den Rohdaten und zum anderen aus den korrigierten Daten. Für Kallisto habe ich aufgrund der Datenlage ausschließlich aus den Rohdaten eine Umlaufzeit bestimmen können.

Aus den Bahnradien r und den (hier aus den Rohdaten ermittelten) Umlaufzeiten T der Monde lassen sich nach der Formel $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$ auch die Bahngeschwindigkeiten der Monde berechnen.

Die in dieser Arbeit bestimmten Werte zu allen 3 Parametern sind für alle 4 Jupitermonde in Tabelle 4 zusammengefasst und zeigen in allen Fällen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Daten aus der

Literatur. Die Abweichungen betragen maximal 4% (bedingt durch die Umrechnung von Pixeln in Grad mittels der Kugel) und unterstreichen die Genauigkeit meiner Experimente.

PARAMETER		Io	Europa	Ganymed	Kallisto
Umlaufbahnradius	exp. [Pixel]	407,2	646,22	1.021	1.794
	exp. [km]	410.472,47	651.413,33	1.029.205,37	1.808.418,51
	Literatur [km]	421.800,00	670.900	1.070.600	1.882.650
Umlaufzeit [Tage]	exp. aus Rohdaten	1,769	3,542	7,177	16,674
	exp. aus korrigierten Daten	1,769	3,551	7,150	
	Literatur	1,769	3,551	7,155	16,689
Bahngeschwindigkeit	exp. [km/s]	16,95	13,37	10,43	7,89
	Literatur [km/s]	17,34	13,74	10,88	8,2

Tabelle 4: Übersicht der eigenen Ergebnisse

3.3.2 Bestimmung der Masse des Jupiters

Neben den Bahngeschwindigkeiten habe ich aus den Bahnradien und den Umlaufzeiten der Monde auch die Masse des Jupiters unter Anwendung des Gravitationsgesetzes bestimmt (hier am Beispiel von Io):

$$F_{Radial} = F_{Gravitation}$$

$$m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{r}{T^2} = \gamma \cdot m \cdot \frac{M}{r^2}$$

$$M = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{r^3}{\gamma * T^2}$$

M – Jupitermasse
m – Masse des Mondes
T – Umlaufzeit des Mondes

r – Bahnradius des Mondes
γ – Gravitationskonstante
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Die aus experimentell bestimmten Daten errechnete Masse ergibt sich damit zu $1{,}8 \cdot 10^{27}$ kg, was im Vergleich zum Literaturwert von $1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg eine Abweichung von etwa 5,3% (wieder auf die Umrechnung der Bahnradien von Pixeln in km zurückzuführen) darstellt.

3.3.3 Nachweis des 3. keplerschen Gesetzes

Anhand des Jupitersystems kann man auch das 3. keplersche Gesetz leicht nachweisen. Es besagt, dass der Quotient der dritten Potenz der Halbachsen und der Quadrate der Umlaufzeiten in einem System einen konstanten Wert annimmt.

$$\frac{r^3}{T^2} = konstant$$

Folglich muss das Auftragen beider Größen für jeden Mond in einem Diagramm eine Gerade ergeben. Dabei sind die Einheiten (solange sie für alle Monde gleich sind), in denen r und T angegeben sind, irrelevant. Die Auftragung meiner Daten zeigt tatsächlich mit hoher Genauigkeit (r^2=1) eine Gerade (siehe Abb. 15).

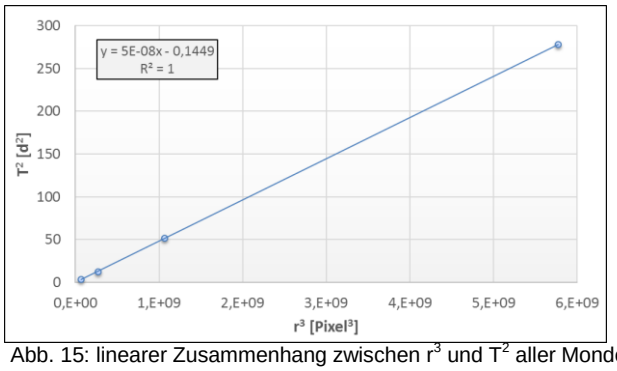

Abb. 15: linearer Zusammenhang zwischen r^3 und T^2 aller Monde

3.3.4 Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

Die letzte astronomische Kenngröße, die ich mit Hilfe meiner experimentellen Daten ermittelt habe, ist die Lichtgeschwindigkeit. In der Literatur wird dies (nach Römer) meist relativ einfach dargestellt: Man beobachtet zwei Verfinsterungen des innersten Mondes Io in einem Abstand von ein paar Monaten, wobei die erste Verfinsterung in Oppositionsstellung beobachtet wird. Die zweite Verfinsterung sollte verspätet (bezüglich des Zeitpunktes, der aufgrund der konstanten Umlaufzeit von Io zu erwarten wäre) zu beobachten sein, da der Abstand zwischen Erde und Jupiter nun größer ist und das Licht folglich länger für die zurückzulegende Strecke benötigt.
Wie im Kapitel 3.2.2.4 beschrieben, ist der Einfluss der sich ändernden Perspektive auf die verspätete Wahrnehmung der Verfinsterung jedoch wesentlich größer als der Einfluss der unterschiedlichen Lichtlaufzeiten und darf somit keinesfalls vernachlässigt werden. Daher ist die Voraussetzung zur Ermittlung der Lichtgeschwindigkeit ein sehr genaues Modell zur Beschreibung der Perspektivenänderung, das ich hier deshalb auch verwendet habe.
Zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit arbeitete ich mit dem Modell der „Datenfixierung auf den Oppositionstag“ (Kapitel 3.2.3.1). Das heißt, dass ich die y-Werte meiner Messwerte anhand der Entfernungen zwischen Erde und Jupiter korrigiert habe und zusätzlich die dazugehörigen real gemessenen Zeiten anhand der Perspektive und der Lichtlaufzeiten korrigiert habe. Zur Korrektur der Zeiten der Messwerte habe ich die Gleichungen 1-16 aus Kapitel 3.2.2.3 nach Gleichung 17 in Excel zu einer Formel zusammengefügt, in der die Lichtgeschwindigkeit die einzige variable Größe war. Ich

änderte den angenommenen Wert für die Lichtgeschwindigkeit iterativ in kleinen Schritten, was folglich zu anderen korrigierten Zeiten führte und somit die Messwerte bezüglich der Sinusfunktion auf der x-Achse verschob. Nach jeder Änderung der Lichtgeschwindigkeit berechnete ich für den kompletten Datensatz des Mondes Io die Abweichungen meiner Messwerte von der Standardsinusfunktion auf der x- und auf der y-Achse. Das heißt, für jeden gemessenen x-Wert (x_g) rechnete ich mir einen der Funktionsgleichung entsprechenden y-Wert (y_b) aus:

$$y_b = a * \sin(\frac{2*\pi}{P} \cdot x_g + d)$$ <Gleichung 21>

Außerdem berechnete ich für jeden gemessenen y-Wert (y_g) den dazugehörigen x-Wert ($x_{b1/2}$). Dafür benötigte ich allerdings 2 Formeln, zum einen die nach x umgestellte Gleichung 22:

$$x_{b1} = \frac{arcsin\left(\frac{y_g}{a}\right)-d}{b} + k \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{b} \qquad k \in \mathbb{N}$$ <Gleichung 22>

und zum anderen die folgende Gleichung:

$$x_{b2} = 2 \cdot \frac{\arccos(0)-d}{b} + 2 \cdot \left(k \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{b}\right) - x_{b1} \qquad k \in \mathbb{N}$$ <Gleichung 23>

Da die Messwerte sowohl auf der x- als auch auf der y-Achse von der Sinusfunktion abwichen, nutze ich die folgende Formel als Bestimmtheitsmaß für die Abweichungen (A) der Messwerte von der Standardsinusfunktion, sowohl auf der x- als auch auf der y-Achse:

$$A = \sqrt{\Sigma\left(x_g - x_b\right)^2 \cdot \Sigma\left(y_g - y_b\right)^2}$$ <Gleichung 24>

Das Ergebnis A gibt demnach die Abweichungen meiner durch die Regressionsrechnung veränderten Messwerte von der Standardsinusfunktion in Abhängigkeit von dem angenommenen Wert für die Lichtgeschwindigkeit an.

Da ich keine Beobachtungen während der Oppositionszeit vorgenommen hatte, konnte ich die Verschiebung (d) der Sinusfunktion auf der x-Achse allerdings nicht experimentell, sondern nur mathematisch bestimmen. Also führte ich die oben beschriebenen Rechnungen für 20 verschiedene, kleinschrittig geänderte Verschiebungen (d) der Sinusfunktion durch.

Anschließend wollte ich ermitteln, für welche Kombination von der Verschiebung (d) und der Lichtgeschwindigkeit (c) die Abweichungen (A) der Messwerte von der Sinusfunktion am geringsten waren. Allerdings ergab sich nicht, wie erhofft, ein globales Minimum der Abweichungen für ein Datenpaar von d und c. Die Abweichungen wurden (für kleinere Verschiebungen) umso kleiner, je größer die Lichtgeschwindigkeit wurde (Abb. 16). Das heißt, dieses Ergebnis suggeriert, dass die Lichtgeschwindigkeit unendlich groß ist. Das zeigt erneut, wie gering der Einfluss der unterschiedlichen Lichtlaufzeiten auf die verspätete Wahrnehmung der Monde an bestimmten Punkten ist, weshalb der Effekt experimentell auch nur schwer bestimmbar ist.

Ich schlussfolgerte, dass man die Lichtgeschwindigkeit also nur experimentell bestimmen kann, wenn man tatsächliche Beobachtungen während der Opposition hat, denn nur dann kann d experimentell bestimmt werden. Eine neue Iteration unter Konstanthalten von d (ich machte eine bestmögliche subjektive Schätzung für d aus den Datensätzen) und anschließendem Iterieren von c ergab nun ein Minimum der Abweichungen A aller Messwerte von der Standardsinusfunktion für einen Wert der Lichtgeschwindigkeit von 304.000 $\frac{km}{s}$ ($\pm$500 $\frac{km}{s}$). Das ist bezüglich des Literaturwertes von 299.000$\frac{km}{s}$ eine relativ geringe Abweichung (<2%).

In Abbildung 16 und 17 sind die Ergebnisse aus beiden Analysen gegenübergestellt. Abbildung 16 zeigt das Ergebnis der Iteration beider Parameter, der Verschiebung d und der Lichtgeschwindigkeit c. In diesem Fall wäre die Lichtgeschwindigkeit irrtümlich als unendlich groß angenommen worden (Die rote Kurve in Abb. 16 verbindet die Minima der Kurven, zeigt aber selbst kein Minimum). In Abbildung 17 habe ich die Verschiebung d als konstant angenommen (so wie sie z.B. am Oppositionstag experimentell hätte bestimmt werden können) und dann ausschließlich über nur einen Parameter, die Lichtgeschwindigkeit, iteriert. In diesem Fall zeigt sich ein Minimum der Abweichungsquadrate der realen Messwerte von der Standardsinusfunktion mit einem Wert für die Lichtgeschwindigkeit von 304.000 $\frac{km}{s}$.

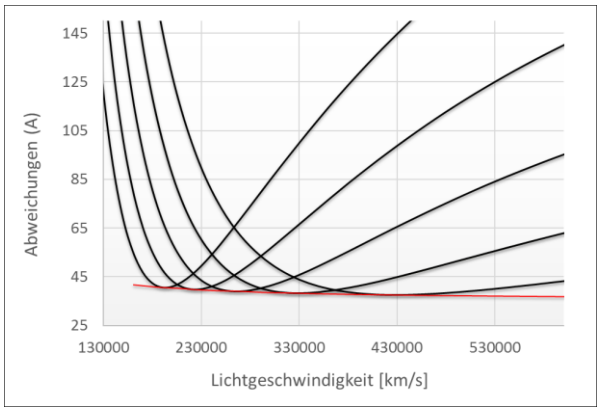

Abb. 16: Abweichungen (A) der Messwerte von der Standardsinusfunktion in Abhängigkeit von der Lichtgeschwindigkeit (für verschiedene Verschiebungen d, rote Kurve zeigt die Minima der Abweichungen (A) in Abhängigkeit von den Verschiebungen d)

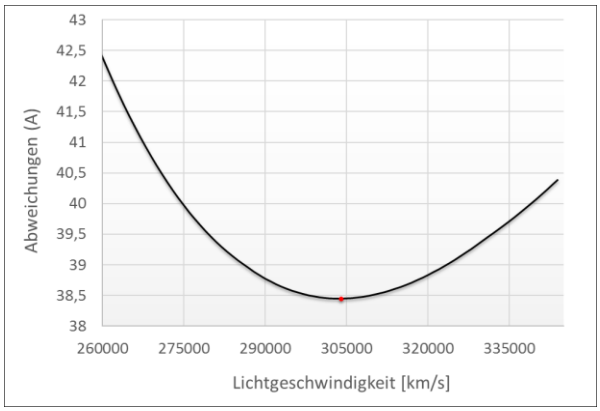

Abb. 17: Abweichungen (A) der Messwerte von der Standardsinusfunktion in Abhängigkeit von der Lichtgeschwindigkeit (für einen bestimmten Wert der Verschiebung d, Minimum der Abweichungen durch roten Punkt gekennzeichnet)

Da die hier beschriebenen Rechenoperationen für den gesamten Datensatz von Io ca. 230 Mio. Rechnungen umfassten, habe ich mir hierfür ein Makro in Excel geschrieben. Der Computer (I7-Prozessor) hat trotzdem ca. 36 Stunden für diese Rechnungen benötigt.

4 Ausblick

In dieser abschließenden Betrachtung stellte ich mir die Frage, welche Aussagen man über das Sonnensystem treffen kann, nur indem man das System von Jupiter und seiner Monde beobachtet, das heißt, ohne heute verfügbare Literaturwerte zu kennen. Was also hätte zum Beispiel sogar Galileo Galilei schon vor 400 Jahren über die Größen und die Größenverhältnisse im Sonnensystem schlussfolgern können, wenn er die von mir verwendete Technik (Kamera, Teleskop, Computer) sowie diverse Helfer (auf verschiedenen Kontinenten, um die Positionen der Jupitermonde zu jeder Zeit festhalten zu können) gehabt hätte?

Die oszillierenden Realfunktionen aller Monde sind mit Ausnahme des Bereichs um die Konjunktionsstellung von Erde und Jupiter (in Abbildung 18 rot gekennzeichnet) experimentell bestimmbar. Die sich durch die Konjunktionsstellung ergebene Datenlücke könnte entweder doch mit experimentellen Daten gefüllt werden, wenn während der Konjunktionsstellung eine Sonnenfinsternis auftritt oder sie kann alternativ wegen des stetigen Verlaufs auch interpoliert werden.

Wenn somit die gesamten oszillierenden realen Funktionen für die Umläufe der Monde zur Verfügung stehen, erkennt man, dass sich die Amplituden aller Funktionen der Monde periodisch ändern und an einem Tag am größten sind, und zwar am Oppositionstag. Wenn man die Beobachtungen lange genug durchführt, sieht man, dass die Amplituden nach ca. 13 Monaten wieder ihren maximalen Wert erreichen, was den nächsten Oppositionstag markiert. Daher ist auch der Konjunktionstag bekannt. An diesem Tag wäre nun die Sonnenfinsternis zur experimentellen Bestimmung der oszillierenden Realfunktion erforderlich. Während der Opposition sowie während der Konjunktion müsste man scharfe Bilder von Jupiter selbst machen. Der Quotient der beiden Durchmesser des Jupiters (in Pixeln) gibt nun an, wie viel größer der Abstand zwischen Erde und Jupiter während der Konjunktion (A_K) im Vergleich zum Abstand zwischen Erde und Jupiter während der Opposition (A_O) ist:

$A_K = 1{,}4754 \cdot A_O$ <Gleichung 25>

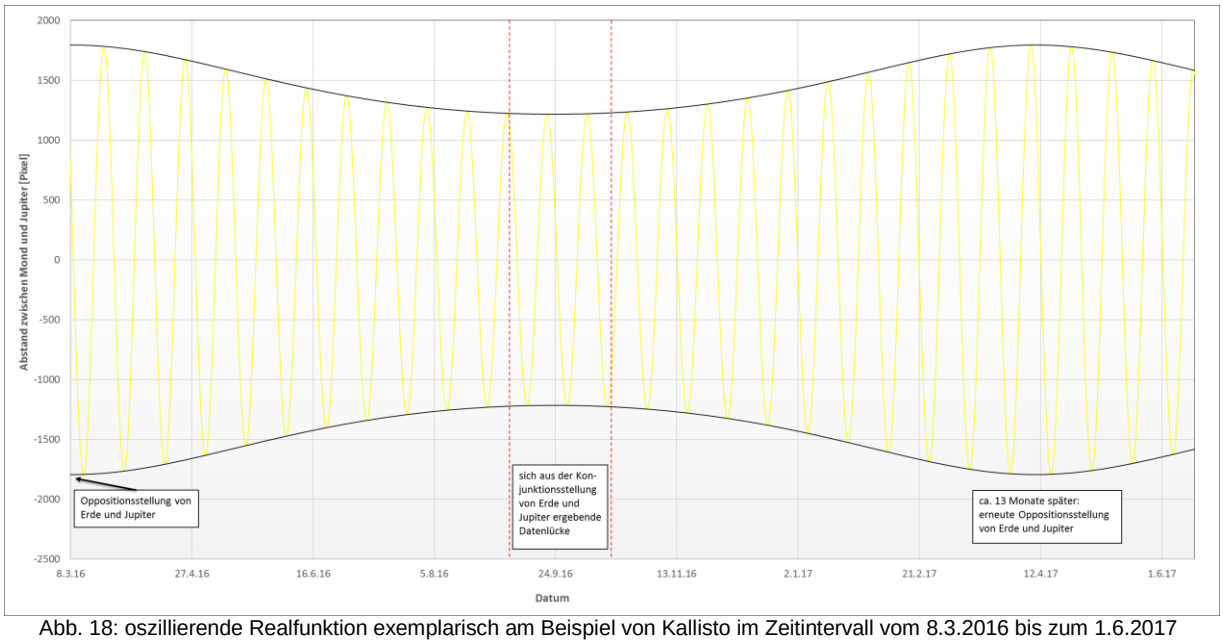

Abb. 18: oszillierende Realfunktion exemplarisch am Beispiel von Kallisto im Zeitintervall vom 8.3.2016 bis zum 1.6.2017

Der Bahnradius der Umlaufbahn der Erde (r_E) würde sich, wie aus Abbildung 19 hervorgeht, nach Gleichung 26 berechnen lassen.

$r_E = \frac{A_K - A_O}{2} = \frac{1{,}4754 \cdot A_O - A_O}{2} = \frac{0{,}4754 \cdot A_O}{2}$

<Gleichung 26>

Allerdings ist A_O ebenfalls nicht bekannt. Nach A_O umgestellt ergibt sich aus Gleichung 26 für

$A_O = \frac{2 \cdot r_E}{0{,}4754} = 4{,}2 \cdot r_E$. Ohne die Literaturwerte zu kennen, könnte man für r_E nun 1 einsetzten, also in Astronomischen Einheiten (Distanz zwischen Erde und Sonne) rechnen, ohne die exakte Größe der Astronomische Einheit (AE) zu kennen (also wäre A_O = 4,2 AE). Den Bahnradius der Umlaufbahn des Jupiters (r_J in AE) kann man dann, wie in Abbildung 19 erkennbar, mit der folgenden Formel berechnen: $r_J = r_E + A_O = 5{,}2$ AE <Gleichung 27>

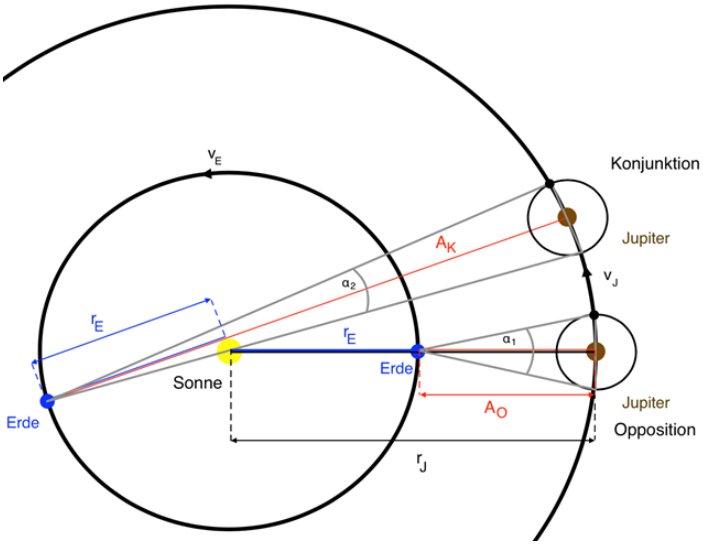

Abb. 19: Positionen von Erde und Jupiter während der Opposition (t1) und während der Konjunktion (t2)

Da die Umlaufzeit der Erde um die Sonne und jetzt auch r_J sowie r_E bekannt sind, kann man mit dem 3. keplerschen Gesetz (was ja auch experimentell anhand des Jupitersystems nachweisbar ist) die Umlaufzeit des Jupiters um die Sonne errechnen.

Während der Opposition müsste man die Bahnradien der Monde anhand der oszillierenden Realfunktionen in Pixeln bestimmen und sie (wie im vorherigen Kapitel beschrieben) mit Hilfe von Aufnahmen einer Kugel in scheinbare Sehwinkel (α_1) umrechnen. Da A_O [AE] nun bereits bestimmt wurde, könnte man auch die realen Bahnradien der Monde (r) [AE] nach folgender Gleichung bestimmen:

$r_{Mond} = A_0 \cdot \tan\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)$ <Gleichung 28>

Wenn man in Gleichung 28 nun den scheinbaren Sehwinkel des Jupiters anstatt die scheinbaren Sehwinkel der jeweiligen Umlaufbahnen der Monde einsetzt, kann man ebenso den realen Radius des Jupiters ($r_{Jupiter}$) bestimmen.

Wenn man die oszillierenden Realfunktionen der Monde nahezu vollständig zur Verfügung hat, kann man außerdem die Umlaufzeiten der Monde leicht ablesen (für eine höhere Genauigkeit ist es sinnvoll, den Mittelwert aus mehreren Umläufen zu bilden). Mit der Formel

$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$ <Gleichung 29>

lassen sich dann die Bahngeschwindigkeiten der Galileischen Monde der Erde und die Bahngeschwindigkeit des Jupiters (in $\frac{AE}{s}$) berechnen.

Wenn diese Werte ermittelt wurden, kann auch die Zeit, die das Licht von der Sonne bis zur Erde benötigt, bestimmt werden. Daraus kann dann die Lichtgeschwindigkeit (in $\frac{AE}{s}$) berechnet werden. Dafür muss man allerdings sowohl mit dem Modell der Datenfixierung auf den Oppositionstag als auch mit dem Modell der oszillierenden Realfunktionen (aus Kapitel 3.2.3.1/2) arbeiten. Das Modell der Datenfixierung auf den Oppositionstag lässt sich aufstellen, indem die Verschiebung d der jeweiligen Ort-Zeit-Funktion eines Mondes an die am Oppositionstag ermittelten Daten angepasst wird. Die Umlaufzeiten und die Amplituden kann man für jeden Mond (wie bereits oben beschrieben) leicht ermitteln. Damit lassen sich die Standardsinusfunktionen $y = a \cdot \sin(\frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot x + d)$ aller Monde aufstellen. Die oszillierenden Realfunktionen gehen aus dem Auftragen der gemessenen Daten hervor (siehe Abb. 18).
Nun wird ein beliebiger Messwert (x- und y-Wert eines beliebigen Mondes) von einer Beobachtung, möglichst lange nach der Oppositionsstellung von Erde und Jupiter (da deren Abstand somit größer ist) benötigt. Da der Abstand zwischen Erde und Jupiter während der Konjunktionsstellung am größten ist, gehe ich hier von einem während der Konjunktion aufgenommenem Messwert (was beispielsweise durch eine Sonnenfinsternis möglich wäre) aus. Dessen y-Wert muss dann mit Hilfe des Faktors zur Abstandsveränderung (das in Kapitel 3.2.2.5 beschriebene Modell lässt sich mit den bisher ermittelten Daten in AE aufstellen) korrigiert werden. Den gleichen (korrigierten) y-Wert findet man dann auch auf der Standardsinusfunktion (aus dem Modell der Datenfixierung auf den Oppositionstag). Die dazugehörigen x-Werte (Zeiten) unterscheiden sich dann beispielsweise für Io um ca. 1,6 Stunden (Abb. 20). Wenn man dann den gemessenen x-Wert unter Berücksichtigung der dem Datum entsprechenden Perspektive (dieses Modell lässt sich mit den vorher berechneten Werten in AE wie in Kapitel 3.2.2.3 beschrieben aufstellen) korrigiert, unterscheiden sich dieser x-Wert und der x-Wert der Standardsinusfunktion nur noch um ca. 16,6 Minuten (abhängig von der Genauigkeit der Daten). Da die Abweichungen der Messwerte von den Standardsinusfunktionen auf der x-Achse nur von der Perspektive und von den Lichtlaufzeiten abhängen, sind die 16,6 Minuten also durch die Lichtlaufzeiten bedingt. Das ist folglich die Zeit, die das Licht benötigt, um die Strecke des Durchmessers der Erdumlaufbahn ($2 \cdot r_E = 2\ AE$) zurückzulegen. Die Hälfte der Zeit (8,3 min) benötigt das Licht dann also, um die Strecke einer Astronomischen Einheit zurückzulegen. Damit kann die Lichtgeschwindigkeit so zu ca. 0,002 $\frac{AE}{s}$ bestimmt werden. Abbildung 20 veranschaulicht diese Überlegung:

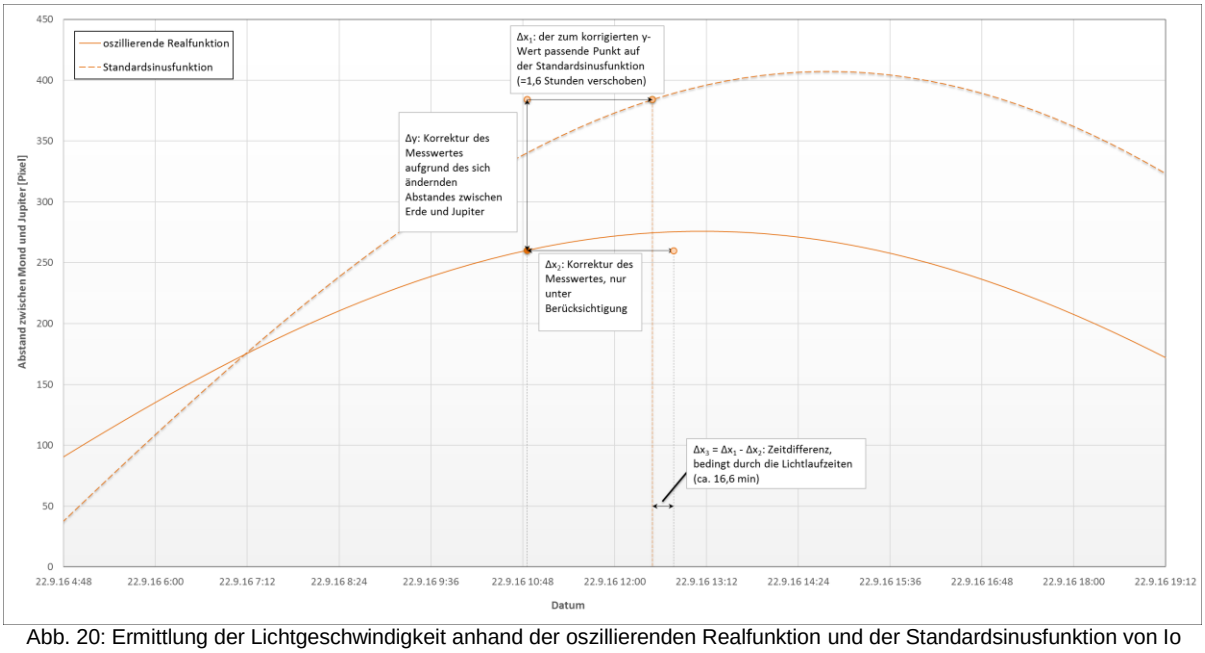

Abb. 20: Ermittlung der Lichtgeschwindigkeit anhand der oszillierenden Realfunktion und der Standardsinusfunktion von Io

Man kann also durch das Beobachten des Systems des Jupiters und seiner Monde sämtliche Größen und Größenverhältnisse im Sonnensystem in AE angeben. Wenn man die reale Größe der Astronomische Einheit dann ebenfalls experimentell bestimmt (beispielsweise während eines Venustransits), kann man all diese Größen auch in km bzw. in km/s umrechnen.
Da für die hier beschriebenen Analysen noch wesentlich umfangreichere Datensammlungen notwendig gewesen wären, als ich sie vorgenommen habe, konnte ich all diese Schlussfolgerungen in

der kurzen Zeit nicht experimentell belegen, jedoch lassen sie sich bereits mathematisch auf der Grundlage der von mir modellierten oszillierenden Realfunktionen bestimmen.
Tabelle 5 gibt abschließend einen Überblick aller Kenngrößen/Parameter, die mit den soeben beschriebenen Methoden ermittelt werden können.

Parameter	Formelzeichen	Bestimmungsmethode	Veranschaulichung	Berechnung:
Dauer zwischen 2 Oppositionsstellungen	-	Zeit zwischen 2 Maxima der Amplituden in der oszillierenden Realfunktion	Abbildung 18	-
Abstand zwischen Erde und Jupiter während der Konjunktionsstellung	A_K	Quotient der Durchmesser der Jupiterscheibe (Opposition/Konjunktion) gibt an, wie viel größer Abstand (Erde-Jupiter) während der Konjunktion (A_K) im Vergleich zum Abstand (Erde-Jupiter) während der Opposition (A_O) ist	Abbildung 19	Gleichung 25
Radius der Erdumlaufbahn	r_E	kann experimentell beispielsweise während eines Venustransits bestimmt werden, hier r_E=1 AE, es wird in AE gerechnet	Abbildung 19	(Gleichung 26)
Abstand zwischen Erde und Jupiter während der Oppositionsstellung	A_O	Umstellen von Gleichung 26 nach A_O, für r_E 1 AE einsetzen	Abbildung 19	Gleichung 26
Bahnradius der Umlaufbahn von Jupiter	r_J	siehe Gleichung 27	Abbildung 19	Gleichung 27
Umlaufzeit von Jupiter (um die Sonne)	T_J	Anwendung des 3. keplerschen Gesetzes	-	r^3/T^2 =konstant
Bahnradien der Monde	r_{Mond}	erst in Pixel auslesen; durch Ermittlung der scheinbaren Sehwinkel der Umlaufbahnen: Umrechung von Pixel in AE	Abbildung 18/19	Gleichung 28
Radius von Jupiter	$r_{Jupiter}$	erst in Pixel auslesen; durch Ermittlung des scheinbaren Sehwinkels Jupiters: Umrechung von Pixel in AE	Abbildung 19	Gleichung 28
Umlaufzeiten der Monde (um Jupiter)	T_{Mond}	anhand der jeweiligen oszillierenden Realfunktionen ablesen (für eine höhere Genauigkeit gegebenenfalls Mittelwertbildung aus mehreren Umläufen)	Abbildung 18	-
Bahngeschwindigkeiten von der Erde, Jupiter, den Monden	v	einsetzen der entsprechenden Werte in die Formel	-	Gleichung 29
Lichtgeschwindigkeit	c	anhand des Perspektivenmodells, des Abstandseffektes und den Modellen Datenfixierung auf den Oppositionstag, sowie den oszillierenden Realfunktionen	Abbildung 20	siehe Abbildung 20

Tabelle 5: Übersicht zur Ermittlung aller Parameter, die durch Beobachtung der Jupitermonde bestimmt werden können

5 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit habe ich die Galileischen Monde beobachtet. Beim Versuch, die beobachteten Positionen der Monde mit Sinusfunktionen zu beschreiben, ergaben sich, wie vermutet, aufgrund der sich ändernden Konstellationen von Erde und Jupiter systematische Abweichungen der Messwerte von den Funktionen auf der x- und der y-Achse. Die Abweichungen auf der x-Achse resultierten aus der sich ändernden Perspektive und den sich ändernden Lichtlaufzeiten, die auf der y-Achse aus den sich ändernden Entfernungen zwischen Erde und Jupiter. Diese Abweichungen habe ich mit entsprechenden Modellen numerisch korrigiert, um somit sinusartige Funktionen aufzustellen, die die Bewegungen der Monde beschreiben (von mir als oszillierende Realfunktion und als auf Oppositionsstellung normierte Standardsinusfunktion bezeichnet). Mit Hilfe dieser Funktionen habe ich anschließend die Umlaufzeiten, die Bahnradien, scheinbare Wendepunkte der Monde, die Lichtgeschwindigkeit und die Jupitermasse relativ genau bestimmt. Aus den Analysen hat sich schließlich ergeben, dass die Lichtgeschwindigkeit rein experimentell nur dann bestimmbar ist, wenn Beobachtungen während der Oppositionsstellung von Erde und Jupiter vorgenommen werden. Außerdem konnte ich das 3. keplersche Gesetz experimentell nachweisen.
Zum Schluss habe ich den theoretischen Nachweis erbracht, dass auch ohne Kenntnis von Literaturwerten sämtliche Größen des Sonnensystems aus rein experimentell ermittelten Daten bestimmbar sind.

6 Quellenverzeichnis

6.1 Buchquelle:

1. Brückner, Steffen: „Praxisbuch der Astronomie mit dem PC“.
Data Becker, 2005.

6.2 Internetquellen:

2. Bendt, Günther: „Planetensichtbarkeit“.
URL: http://www.astronomie.de/der-himmel-aktuell/planetensichtbarkeit/
[Stand: 24.Juni 2016].

3. Böhm Schweizer, Denise: „Galileo Galilei”.
URL: https://astrokramkiste.de/galilei
[Stand: 24.Juni 2016].

4. Greicius, Tony: „Juno Overview“.
URL:https://www.nasa.gov/mission_pages/juno/overview/index.html
[Stand: 24.Juni 2016].

5. leifiphysik: „Messung der Lichtgeschwindigkeit nach RØMER“.
URL:http://www.leifiphysik.de/optik/lichtausbreitung/versuche/lichtgeschwindigkeit#lightbox=/themenbereiche/lichtausbreitung/lb/messung-der-lichtgeschwindigkeit-nach-romer
[Stand: 30.November 2016].

6. van Reh, Stefan: „Jupiter - Monde“.
URL: http://www.astronomie.de/das-sonnensystem/planeten-und-monde/der-jupiter/monde/
[Stand: 30.November 2016].

7. van Reh, Stefan: „Jupiter - Grunddaten“.
URL: http://www.astronomie.de/das-sonnensystem/planeten-und-monde/der-jupiter/grunddaten/
[Stand: 30.November 2016].

6.3 Bildquellen:

8. Einstein-Gymnasium Neuenhagen: „EGN-Logo“
URL: http://intern.einstein-gymnasium-neuenhagen.de/schueler/EGN_logo.png
[Stand: 30.November 2016].

9. Unbekannt: „Celestron Schmidt-Cassegrain Teleskop“
URL: http://nimax-img.de/Produktbilder/zoom/21829_0/Celestron-Schmidt-Cassegrain-Teleskop-SC-356-3910-CGEM-DX-1400-GoTo.jpg
[Stand: 30.November 2016].

Abb. 3 – 20, Tab 1 – 5, sowie die dazugehörigen Rechnungen → eigene Grafiken/Rechnungen

Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe, keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und Stellen, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.
Das Gleiche gilt auch für beigegebene Zeichnungen und Darstellungen.

Hoppegarten, 20. 1. 2017
Ort, Datum

Mathis Harder
Unterschrift