

Schriftliche Arbeit zum „Jugend forscht“ Wettbewerb
2016/17

Eifer statt Hightech

Experimentelle Monatsbestimmung mit Hilfe von Mondbildern

Von:

Niklas Deworetzki, Sven Kröckel, Leon Sieke

Betreuer:

Armin Moritz

Gymnasium Johanneum Herborn



Schule:

Johanneum Gymnasium Herborn
Otto-Wels-Straße 1a
35745 Herborn

Kurzfassung

Wenn man sich als einzelne Privatperson im Gebiet der Astronomie betätigt, stößt man schnell mit seinen Mitteln an Grenzen, da es kaum günstige Instrumente gibt, um Forschungen durchzuführen und falls doch, dann mangelt es diesen oftmals an Präzision. Jedoch waren wir der festen Überzeugung, dass es möglich sein muss, mit Eifer statt Hightech auch in der Astronomie forschen zu können. Mit dem Ziel vor Augen, die Monatslänge ohne Satellitenbilder oder Lasertechnik zu bestimmen, machten wir uns also auf, die benötigten Daten zu sammeln. Hierbei dient eine Digitalkamera, welche dazu verwendet wird, über einen längeren Zeitraum hinweg Fotos vom Mond zu machen, als einziges Hilfsmittel neben einem Computer und einem selbst entwickelten Programm, um spätere Berechnungen durchzuführen. Letztendlich konnten wir zeigen, dass es durch unsere Methode für Jedermann möglich ist, mit relativ geringem Aufwand und einer handelsüblichen Digitalkamera, in der Astronomie zu forschen und die Monatslänge zu bestimmen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Analyse der Mondbilder	4
2.1	Vermessung der Mondradien	4
2.2	Ermittlung der relativen Sichtbarkeit	5
2.3	Die Exzentrizität der Mondbahnellipse	6
3	Programm zur Approximation einer Sinuskurve	8
4	Ergebnisse und Diskussion	10
4.1	Die anomalistische Monatsperiode	10
4.2	Die synodische Monatsperiode	11
4.3	Die Exzentrizität	12
5	Zusammenfassung und Ausblick	15
6	Danksagungen	16
7	Quellen- und Literaturverzeichnis	16

1 Einleitung

Zu Beginn werden wir einleitend erklären, was uns zu unserem Beitrag zu „Jugend forscht“ inspiriert hat. Unser Team bestehend aus drei Schülern der gymnasialen Oberstufe existiert schon länger in dieser Konstellation. Wir drei interessieren uns schon lange für Naturwissenschaften und besonders die Astronomie weckte einen Reiz in uns. Als wir dann entdeckten, dass unsere Schule auch eine Astronomie AG (Sat-AG) anbietet, waren wir zunächst voller Euphorie dabei. Wir stießen jedoch sehr schnell an unsere Grenzen, da für eine präzise astronomische Forschung in der Regel eine hochspezialisierte Ausrüstung benötigt wird, die uns als normale Schüler nicht zur Verfügung steht. So ist es zum Beispiel außerhalb unserer AG für uns nahezu unmöglich, Satellitenbilder der Erde aufzunehmen oder diese Bilder mit spezieller Software auszuwerten, da uns die Mittel fehlen, um Zugriff auf die kostspieligen Anwendungen zu erhalten. Jedoch ließen wir uns davon nicht aufhalten. Für uns war klar, dass es auch mit einfachsten Mitteln möglich sein muss, in der Astronomie zu forschen. Also beschlossen wir, anhand der Fotos einer handelsüblichen Digitalkamera die Länge eines Monats zu bestimmen. In der Theorie war es für uns ganz einfach, wir mussten nur den Mond einige Male fotografieren und danach die Bilder auswerten. Also begannen wir mit unseren Forschungen, immer mit der einen Frage vor unseren Augen: „Wie ist es möglich, die Monatslänge anhand von Fotos des Mondes zu bestimmen?“

Aktueller Forschungsstand

Die aktuellen Werte der Mondumlaufbahn wurden durch Messungen der Entfernung zwischen Erde und Mond über einen längeren Zeitraum bestimmt.

Dazu wird das sogenannte Lunar Laser Ranging (kurz LLR) verwendet. Um die Entfernung zwischen Mond und Erde zu bestimmen, wird von einer Bodenstation ein Laserstrahl in Richtung eines Reflektors auf dem Mond gerichtet, der während der Apollo 15-Mission auf dem Mond aufgestellt wurde. Dieser Reflektor hat die Eigenschaft, das eintreffende Licht in dieselbe Richtung zu reflektieren, aus der es herkam. So kehrt der Laserstrahl wieder zur Bodenstation auf der Erde zurück. Wenn nun die Zeit zwischen Absenden und Eintreffen des Laserstrahls gestoppt wird, kann mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit, welche bekannter Weise konstant ist, die Entfernung zwischen Mond und Erde berechnet werden.

Verschiedene Definitionen eines Monats

Während unserer Forschungen fiel uns jedoch auf, dass es verschiedene Definitionen eines Monats gibt. Durch die Umlaufbahn des Mondes um die Erde, die eigene Drehung der Erde und die Umlaufbahn der Erde um die Sonne ergibt sich zusammenhängend mit der Definition dieser Monate auch eine unterschiedliche Monatslänge. Folgende Monatsdefinitionen werden hinsichtlich unserer Arbeit weiter erklärt:

- Synodischer Monat
- Siderischer Monat
- Drakonitischer Monat
- Tropischer Monat
- Anomalistischer Monat

Der synodische Monat

Der synodische Monat wird definiert durch den kompletten Durchlauf aller Mondphasen (auch Lunation genannt). Das heißt, dass das Zeitintervall zwischen zwei Vollmondphasen, der synodischen Monatslänge entspricht. Die Mondphasen, welche auf unseren Fotos gut zu erkennen sind, dienen als Grundlage für die Bestimmung der synodischen Monatslänge.

Der siderische Monat

Siderisch, welches von dem lateinischen Wort „sidius“ (Stern) abstammt, deutet bereits die Definition des siderischen Monats an. Als Grundlage zur Bestimmung der Monatslänge dient ein Fixstern. Das Zeitintervall, welches benötigt wird, bis der Mond zweimal an demselben Fixstern vorbeizieht, definiert die Länge des siderischen Monats. Theoretisch scheint es möglich anhand von Fotos das Vorbeiziehen des Mondes an einem Fixstern zu bestimmen, jedoch ergibt sich folgendes Problem: Bei der Aufnahme der Fotos strahlt der Mond so hell, dass es durch die Belichtung der Kamera beinahe unmöglich ist, den Mond umgebende Sterne aufzunehmen.

Der drakonitische Monat

Der drakonitische Monat ist durch die Mondknoten definiert. Ein Mondknoten ist der Schnittpunkt der Mondbahn mit der Ekliptikebene, welche der scheinbaren Bahn der Sonne auf dem Fixsternhintergrund entspricht. Da die Mondbahn in einem Winkel von ca. 6° zur Ekliptikebene steht, gibt es zwei Mondknoten: Einen aufsteigenden Mondknoten und einen absteigenden Mondknoten. Der aufsteigende Mondknoten, bei welchem der Mond die Ekliptikebene von Süd nach Nord überquert, wird bei dem drakonitischen Monat verwendet um die Monatslänge zu bestimmen. Das Zeitintervall zwischen zwei Durchläufen des Mondes durch den aufsteigenden Mondknoten ist hierbei die Länge des drakonitischen Monats. Der Name leitet sich aus dem früheren Bild eines Drachen ab, welcher bei einer Sonnenfinsternis die Sonne verschluckte. Da nur an den Mondknoten eine Sonnenfinsternis möglich ist, wurden diese Mondknoten auch Drachenknoten genannt und der Name „drakonitischer Monat“ geprägt. Da es anhand einzelner Fotos des Mondes unmöglich ist, die Mondknoten zu bestimmen, entspricht auch diese Monatsdefinition nicht unseren Möglichkeiten.

Der tropische Monat

Ein tropischer Monat ist durch die Zeitspanne definiert, die für zwei Durchgänge des Mondes durch den Stundenkreis des Frühlingspunktes (siehe Abb. 1) benötigt wird. Der Frühlingspunkt ist dabei als der Schnittpunkt des Himmelsäquators mit der Ekliptikebene, an welchem die Sonne zum Frühlingsanfang der Nordhalbkugel steht, definiert.

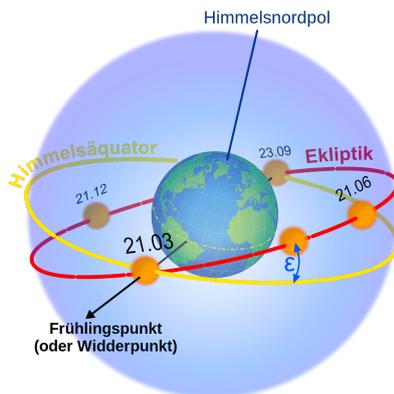


Abb. 1: Illustration des Frühlingspunktes ¹

Der anomalistische Monat

Der anomalistische Monat wird durch die Rückkehr zur selben Apside der Mondumlaufbahn definiert. Eine Apside oder Apsis ist der Hauptscheitelpunkt einer Ellipse. Um die Länge des anomalistischen Monats zu bestimmen wird das Zeitintervall verwendet, welches der Mond benötigt, um zur selben Apside zurückzukehren. Durch unsere Fotos können wir die Länge des anomalistischen Monats bestimmen, da die Entfernung des Mondes zur Erde durch die relative Größe des Mondes feststellbar ist und somit auch die Ellipsenbahn des Mondes um die Erde bestimmt werden kann.

Das Material

Als Grundlage für die Bestimmung der Monatslängen verwenden wir 123 Fotos vom Mond. Über einen Zeitraum von einem dreiviertel Jahr hat unser Lehrer, Herr Moritz, diese Fotos aufgenommen. Als Messinstrument für unsere Daten diente dabei die „Canon EOS 500D Digitalkamera“, welche eine Auflösung von 15 Megapixel bietet. Wichtig war dabei, dass die Fotos immer mit derselben Brennweite aufgenommen wurden damit die Größe des Mondes auf dem Foto nur von der Entfernung des Mondes zur Erde abhängig ist. Eventuelle Verzerrungen durch die Linse lassen sich vernachlässigen, da die Größe des Mondes in geringem Verhältnis zum Rest des Bildes steht und sich der Mond auf den Aufnahmen immer mittig befindet. Zur Analyse wurden die Bilder auf 600 x 600 Pixel zugeschnitten. Dadurch lässt sich im Nachhinein die relative Entfernung bestimmen. Aufgrund der großen Entfernung des Mondes wurde der Fokus der Kamera bei allen Bildern nahezu auf unendlich gestellt.

¹Urheber: S.Fonsi, <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/Ecliptic.svg> (Aufgerufen am 24.03.17)

2 Analyse der Mondbilder

2.1 Vermessung der Mondradien

Der anomalistische Monat ist als das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Mondes durch das Perigäum seiner Umlaufbahn definiert. Da diese Bahn elliptisch ist, schwankt der Abstand zur Erde und somit auch seine scheinbare Größe relativ zum Nachthimmel periodisch. Diese periodischen Schwankungen haben wir quantitativ bestimmt. Daher wurde mithilfe eines Messprogramms der Radius des Mondes auf allen Bildern in der Einheit Pixel vermessen (siehe Abb.2) und in einer Tabelle mit den Tagen als Dezimalzahl aufgetragen. Für die präzise Ermittlung des Mondradius in Pixeln wurde in einem Programm ein Kreisumriss gezeichnet, dessen Radius Pixel für Pixel verändert wurde, bis dieser Kreisumriss den Mond auf dem jeweiligen Foto exakt umfasste. Der Radius des Kreisumrisses entspricht dann folglich dem Radius des Mondes auf den Fotos. Dieses Verfahren ist eine gute und schnelle Möglichkeit, den Radius des Mondes auf den Fotos zu bestimmen. Zusätzlich verbessert dieses Verfahren die Genauigkeit bei Fotos, die kurz vor oder nach der Neumondphase aufgenommen wurden, bei denen der Mond nur als dünne Sichel zu erkennen ist. In diesen Fällen muss die Krümmung des Kreisumrisses nur auf die Krümmung der Sichel angepasst werden, was deutlich schneller und präziser ist, als die Bestimmung des Mittelpunktes der Mondscheibe aus einer dünnen Sichel heraus. Die mit der von uns gewählten Methode der Vermessung der Mondradien besitzt daher eine absolute Messunsicherheit von geschätzten $\pm 2\text{Pixel}$ (bei der mehrfachen unabhängigen Vermessung der Mondradien erzielten wir eine Abweichung von max. $\pm 2\text{Pixel}$ bzw. eine auf den durchschnittlichen Pixelradius bezogene relative Messunsicherheit von $\pm \frac{2\text{Pixel}}{279\text{Pixel}} \cdot 100\% \approx 0,72\%$). Diese Messunsicherheit beruht auch auf der Refraktion durch die Erdatmosphäre, wodurch die Größe des Mondes auf den Fotos minimal verändert werden kann.

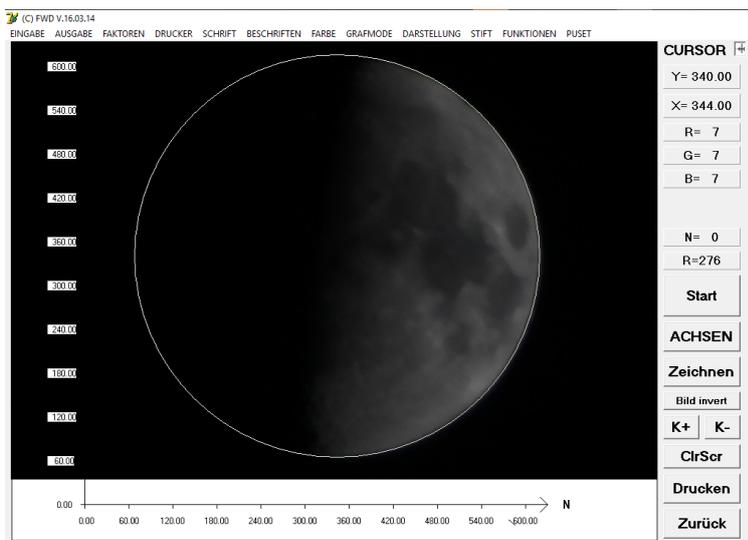


Abb. 2: Vermessung des Mondradius in „XGraph“

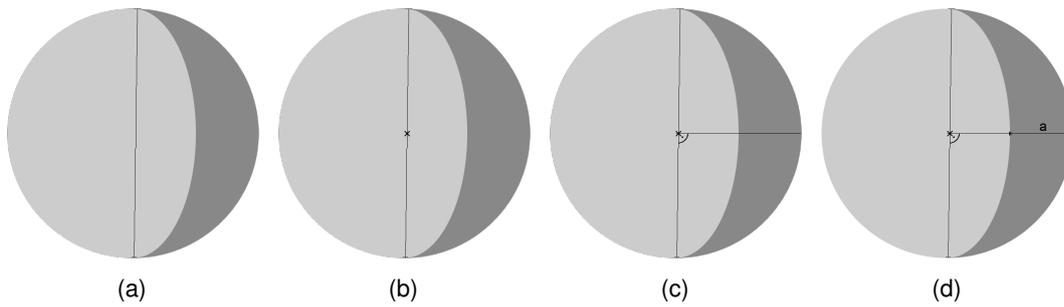
2.2 Ermittlung der relativen Sichtbarkeit

Der synodische Monat beschreibt die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden gleichen Mondphasen, also von Vollmond zu Vollmond oder von Neumond zu Neumond. Der Verlauf der Mondphasen von Neumond zu einem erneuten Neumond wird auch Lunation genannt. Da die synodischen Monatslängen aufgrund nicht konstanter Winkelgeschwindigkeiten zwischen Mond und Erde und dem Einfluss anderer massereicher Objekte im Sonnensystem stark beeinflusst werden können, ist es notwendig, eine große Anzahl an Messwerten über einen langen Zeitraum zu betrachten. Aus der Definition folgend muss für die synodische Monatslänge die mittlere Lunation ermittelt werden, wofür wir zunächst die relative Sichtbarkeit des Mondes auf den einzelnen Fotos bestimmt und dem zeitlichen Verlauf zugeordnet haben. Als relative Sichtbarkeit haben wir das Verhältnis von der "Breite der Mondsichel" (siehe folgende Graphik) zum Durchmesser gewählt. Eine relative Sichtbarkeit von 1 bedeutet, dass der komplette von der Erde aus sichtbare Teil des Mondes beleuchtet ist, was während eines Vollmondes der Fall ist und eine relative Sichtbarkeit von 0 bedeutet, dass keine von der Sonne beleuchtete Fläche des Mondes auf der Erde sichtbar ist, was einem Neumond entspricht. Zur Abschätzung der Lunation muss nun die Zeitspanne zwischen zwei Neumondphasen gemessen werden, was jeweils einer relativen Sichtbarkeit von 0 entspricht. Für die Länge der Lunation kann natürlich auch der Abstand zwischen zwei Vollmondphasen verwendet werden, was insofern sinnvoller ist, da der unbeleuchtete Mond bei Neumond nicht zu fotografieren ist, wodurch wir keine Daten während eines Neumondes sammeln können.

Die relative Sichtbarkeit haben wir als Verhältnis der Breite der sichtbaren „Mondsichel“ a zum gesamten Monddurchmesser, bzw. dem doppelten Mondradius also $\frac{a}{2r}$ angegeben. Somit ist bei Vollmond $\frac{a}{2r} = 1$, da dann $a = 2r$ ist. Entsprechend gilt das gleiche für $\frac{a}{2r} = 0$ bei Neumond. Die Breite a kann mit einigen Hilfsgeraden und Werkzeugen - wie Bildbearbeitungsprogramme wie „GIMP“ sie bieten - vermessen werden. Die einzelnen Schritte dieses Prozesses werden auf den folgenden Seiten anhand einer schematischen Zeichnung des Mondes² dargestellt. Unter Berücksichtigung der leichten Unschärfe des Mondumrisses auf den Fotografien und der Tatsache, dass bei Schritt 1 und 4 in der Vermessung kleine Fehler passieren können, schätzen wir die absolute Messunsicherheit hier auch auf $\pm 2\text{Pixel}$ und damit die relative Unsicherheit auf $\pm \frac{2\text{Pixel}}{322\text{Pixel}} \cdot 100\% \approx 0,62\%$.

1. Ziehen einer Hilfsgeraden durch die Mondachse (a).
2. Markierung des Mittelpunktes der Hilfslinie (b).
3. Ziehen einer zweiten Hilfsgeraden orthogonal zur Ersten, die den Mittelpunkt dieser schneidet (c).
4. Ausmessen der Breite a bspw. mit dem „Measure-Tool“ in GIMP (d).

²<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gibbous-Crescent-half-ellipse-in-circle.png> (Aufgerufen am 03.12.16)



2.3 Die Exzentrizität der Mondbahnellipse

An Abbildung 3 wird ersichtlich, dass die scheinbare Größe des Mondes nicht konstant ist. Der rechte Teil des Bildes wurde im Perigäum (Distanzminimum) und der linke Teil im Apogäum (Distanzmaximum) der Mondumlaufbahn um die Erde aufgenommen.



Abb. 3: Mond im Apo- und Perigäum ³

Der genaue Zusammenhang zwischen der Entfernung des Mondes und dem Mondradius in Pixeln, den ein Fotoapparat aufnimmt, kann mit Hilfe des Strahlensatzes hergeleitet werden (Abb. 4):

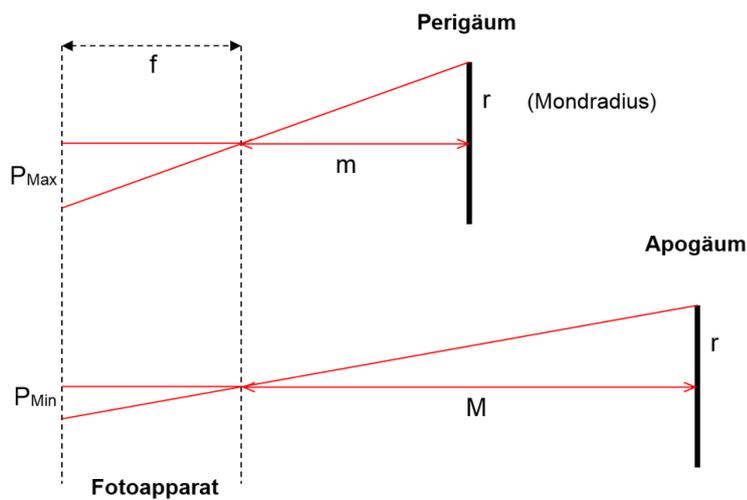


Abb. 4

³<http://www.spektrum.de/alias/bilder/der-variable-scheinbare-durchmesser-des-mondes/1304183> (Aufgerufen am 12.01.17)

$r \hat{=}$ tatsächlicher Mondradius

$f \hat{=}$ Abstand des Objektivs vom Chip. Da der Fokus immer auf unendlich eingestellt war, ist die Brennweite f bei allen Bildern konstant. $P_{Max} \hat{=}$ Maximale Pixelzahl im Perigäum

$P_{Min} \hat{=}$ Minimale Pixelzahl im Apogäum

$m \hat{=}$ Mondabstand im Perigäum

$M \hat{=}$ Mondabstand im Apogäum

Nach den Strahlensätzen gilt:

$$\frac{r}{m} = \frac{P_{Max}}{f}$$

sowie

$$\frac{r}{M} = \frac{P_{Min}}{f}$$

Weil die Größen r und f bei allen Bildern konstant sind, folgt:

$$f \cdot r = \text{konstant} = m \cdot P_{Max} = M \cdot P_{Min} \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{P_{Min}}{P_{Max}}$$

Für sehr weit entfernte Objekte, bei denen der Fokus der Kamera auf unendlich gestellt wird, ist also der Abstand des Objekts zu der scheinbaren Größe (in der Kamera) nahezu antiproportional. Da sich die Erde in einem Brennpunkt der Mondbahnellipse befindet, lässt sich unter Zuhilfenahme von Abb. 5 hieraus eine Formel für die Berechnung der Exzentrizität ε der Mondbahnellipse ableiten:

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\frac{M-m}{2}}{\frac{M+m}{2}} = \frac{M-m}{M+m} = \frac{1 - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{1 - \frac{P_{Min}}{P_{Max}}}{1 + \frac{P_{Min}}{P_{Max}}} = \frac{P_{Max} - P_{Min}}{P_{Max} + P_{Min}}$$

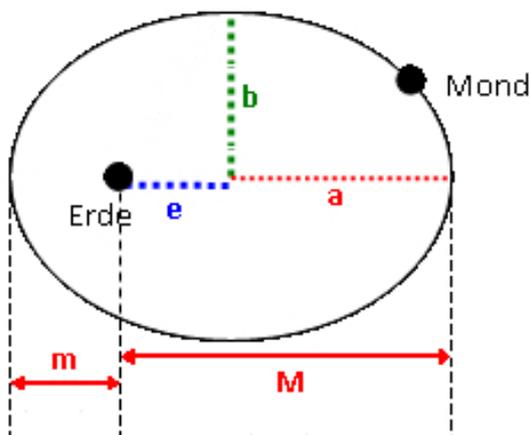


Abb. 5

3 Programm zur Approximation einer Sinuskurve

Wie bereits nach dem Eintragen der Messwerte in einer Excel-Tabelle erkennbar ist, ähnelt der Verlauf der Werte, dem einer periodischen trigonometrischen Funktion (Abb. 6). Die Bestimmung einer solchen trigonometrischen Näherungsfunktion ist jedoch weder mit Excel noch durch ein anderes uns bekanntes Computerprogramm möglich. Daher haben wir ein eigenes Programm entwickelt, mit dessen Hilfe wir eine trigonometrische Funktion finden können, die die vermessenen Punkte auf der Basis der kleinsten Quadrate so genau wie möglich approximiert. Mit Hilfe dieser trigonometrischen Funktion konnten wir die Dauer des anomalistischen Monats bestimmen.

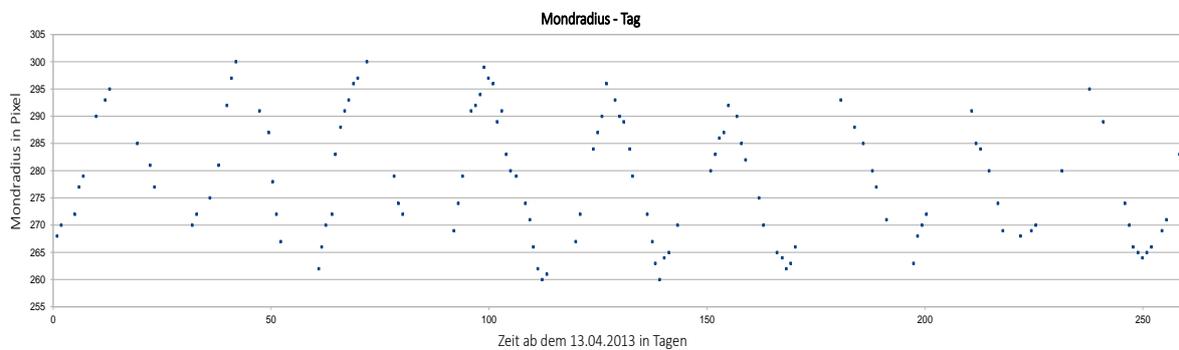


Abb. 6: Mondradius - Zeit Diagramm

Als Eingabe für das Programm wurden sämtliche Messwerte nach folgendem Schema in eine Textdatei übertragen:

*Funktionsstelle (Tage ab 13.04.13 0:00 Uhr) „Trennzeichen“ Funktionswert (Mondradius in Pixeln)
„Trennzeichen“*

Das Programm liest die Datei ein und speichert den Inhalt in einer Liste. Zum Approximieren einer Sinusfunktion anhand der eingelesenen Werte kann ein Wertebereich für alle vier Parameter der Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ sowie die Schrittweite der Inkrementierung eingestellt werden. Die eigentliche Approximation findet in einer vierfach verschachtelten for-Schleife statt, die im Prinzip über alle möglichen Kombinationen der eingestellten Parameter in einer Sinusfunktion iteriert und dabei mit dem gespeicherten Wert aus der zuvor eingelesenen Liste vergleicht. Das Programm ermittelt nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate diejenige Parameterkombination, bei der die entstehende Sinusfunktion die Messwerte am besten approximiert (Abb. 7).

```
for i in range(len(y_val)):
    func = float(a * math.sin(b * (x_val[i] + c)) + d)
    y_value = float(y_val[i])
    midi = midi + math.pow((y_value - func), 2)
return midi
```

Abb. 7: Ausschnitt aus dem Programmcode

Verbesserungen

Als Verbesserung für das Programm wurde später noch eine Abbruch-Funktion sowie eine Fortschrittsanzeige hinzugefügt. Besonders die Abbruch-Funktion ist notwendig, um das Programm frühzeitig zu beenden, falls der Wertebereich zu groß oder die Schrittweite zu klein gewählt wurde, sodass der verwendete Computer zu lange für die optimale Berechnung benötigt. Als Indikator, ob eine Berechnung abgebrochen werden muss, dient die Fortschrittsanzeige, an der zu erkennen und abzuschätzen ist, wie lange die Berechnungen noch andauern.

Filterfunktion

Bei der Bestimmung der Exzentrizität erhielten wir mit der bisher bestimmten Methode nur unzureichende Werte. Für die Exzentrizität benötigt man die vertikale Auslenkung der Messwerte, weil gerade die Differenzen der scheinbaren Mondgrößen durch die unterschiedlichen Mondentfernungen entstehen. Wie aber in (Abb. 8) zu erkennen ist, werden die Hoch- und Tiefpunkte der Messwerte durch die approximierte Sinusfunktion nur unzureichend abgeschätzt. Um die Sinuskurve bei der Bestimmung der Exzentrizität besser an die Hoch- und Tiefpunkte anzupassen, haben wir eine Filterfunktion entwickelt, bei der die zu bestimmende Sinusfunktion hauptsächlich aus den Messwerten nahe der Hoch und Tiefpunkte ermittelt wird.

Wechsel der Programmiersprache

Die erste Version der Approximationssoftware wurde in der Programmiersprache „VB.NET“ unter Windows mit Microsoft Visual Studio als IDE geschrieben, da es in Visual Basic sehr einfach ist, ansprechende Benutzeroberflächen zu erstellen sowie komplexe Abläufe in wenigen Zeilen Code auszudrücken. Der Nachteil dieser hohen Abstraktionsebene ist, dass sich Visual Basic nicht zum Rechnen eignet, da es sehr inperformant läuft. Daher wurde die zweite Version der Software in der Programmiersprache „Python“ geschrieben. Python verfügt über eine ebenfalls recht hohe Abstraktionsebene, was für die Handhabung und die Lesbarkeit des Codes sehr von Vorteil ist, aber das Laufzeitverhalten ist deutlich besser als bei Visual Basic. Des Weiteren wurde bei der zweiten Version auf die grafische Benutzeroberfläche verzichtet und auf die Linux Kommandozeile umgestiegen. Die Parameter- und Programmeinstellungen werden jetzt in Konfigurationsdateien vorgenommen. Da die Python Ausführungsumgebung auf den Computer unserer Schule nicht installiert war, wurde zum Ausführen der Software ein virtueller Server benutzt. Der Umstieg auf Python und das Weglassen der GUI haben sich sehr positiv

auf die Laufzeit ausgewirkt, sodass auch eine genaue Fehlerbetrachtung durch mehrmaliges Approximieren mit dem Monte-Carlo-Verfahren möglich wurde.

4 Ergebnisse und Diskussion

4.1 Die anomalistische Monatsperiode

Die gemessenen Pixelradien wurden in gegen die Zeit in ein Koordinatensystem aufgetragen. Einzelne Lücken in der Messreihe sind aufgrund des Wetters oder der Mondphase vorhanden, da der Mond bei Bewölkung oder während eines Neumondes nicht zu sehen ist (Siehe Abb. 6) Es lässt sich sehr gut die ungefähre Form einer periodischen Funktion erkennen. Mit Hilfe unseres Programms erhielten wir folgende Approximationsfunktion:

$$f(x) = 14,23 \cdot \sin(0,2274824 \cdot (x - 9,3)) + 278,63$$

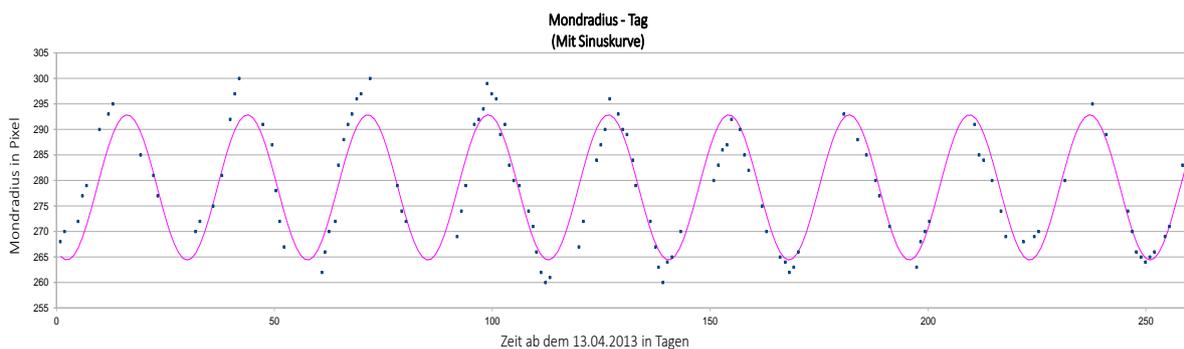


Abb. 8: Mondradius - Zeit Diagramm mit approximierter Sinuskurve

Die experimentell ermittelten Punkte liegen in Wirklichkeit nicht genau auf einer Sinusfunktion, da sich der Mond nicht mit konstanter Geschwindigkeit um die Erde bewegt, sondern aufgrund der Keplerschen Gesetze in Erdnähe schneller und in der Ferne langsamer ist. Außerdem stören die gravitativen Einflüsse der Sonne und anderer Himmelskörper den Mond auf seiner Umlaufbahn. Dennoch bleibt die Zeit, die der Mond für einen kompletten Umlauf um die Erde benötigt, also die Periode, annähernd konstant, weshalb diese unter anderem mit Hilfe einer Sinusfunktion abgeschätzt werden kann. Anhand der Parameter der Funktion vom Typ $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ lassen sich einige Eigenschaften erschließen. $d = 278,63$ entspricht dem durchschnittlichen Pixelradius des Mondes im untersuchten Zeitraum. Der Wert $a = 14,23$ entspricht der Streuung der Pixelradien um den Mittelwert. Aus dem Wert $b = 0,2274824$ kann die Periodenlänge der Funktion bestimmt werden, also die Länge des anomalistischen Monats, weshalb dieser auch sehr genau und auf möglichst viele Ziffern nach dem Dezimalpunkt approximiert werden musste. Teilt man 2π durch den Parameter b erhält man eine anomalistische Monatsperiode von $\frac{2\pi}{0,2274824} = 27,620534$ Tagen. Wir haben uns überlegt, wie groß

die Fehlergrenzen bei unserer Bestimmung der Dauer des anomalistischen Monats sind. Diese sind sehr schwer abschätzbar, da nicht bekannt ist, wie sich Messfehler von $\pm 2Pixel$ bei der Periodenlänge der Sinusfunktion niederschlagen. Daher haben wir folgendes Verfahren gewählt. Ausgehend von den Messwerten der Mondradien haben wir mit einem selbst entwickelten Zufallsgenerator alle Messwerte mit einer zufälligen Streuung von $\pm 2Pixel$ um den Messwert verändert. Mit diesen neuen Werten haben wir die Rechnung, also die Bestimmung der Periodenlänge nochmals durchgeführt und beobachtet, wie sich diese durch die zufällige Streuung verändert. Dies haben wir insgesamt 50-mal durchgeführt. Bei allen durchgeführten Durchgängen erhielten wir eine maximale Abweichung von $\pm 0,0132\%$. Da die Dauer des anomalistischen Monats je nach Position von Sonne und Planeten geringfügig schwanken kann, findet man in der Literatur den Wert $(27,55 \pm 1)$ Tage⁴. Unser Messwert von $(27,620 \pm 0,0036)$ Tagen liegt vollständig in dem von der Literatur angegebenen Intervall. Durch dieses Verfahren können Messfehler bei unserer Methode eingegrenzt werden, nicht jedoch systematische Fehler, da die scheinbare Größenfunktion des Mondes nur näherungsweise einer Sinusfunktion gleicht. Mit einer Abweichung von 0,25% zum mittleren Literaturwert liegt die von uns errechnete anomalistische Monatslänge nahe an der Realität und schätzt den tatsächlichen Wert gut ab.

4.2 Die synodische Monatsperiode

Auch nach der Berechnung der relativen Sichtbarkeit des Mondes (wie in 2.2 beschrieben) haben wir die erhaltenen Werte in einem Diagramm in Abhängigkeit der Zeit aufgetragen.

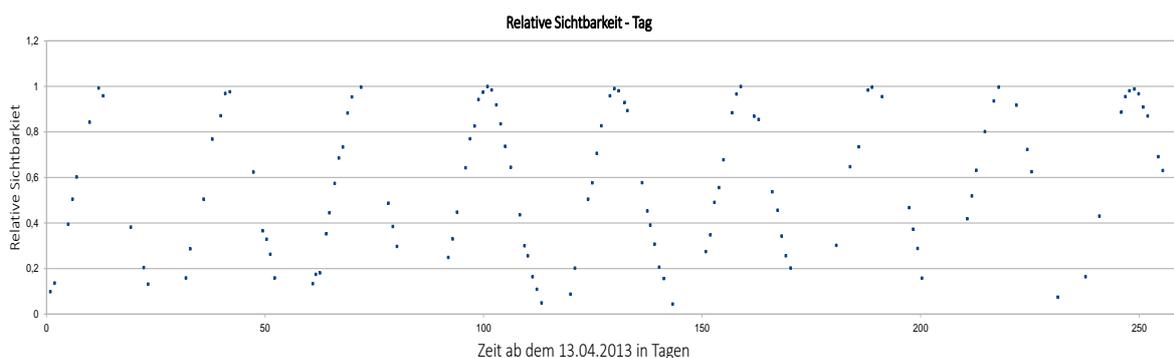


Abb. 9: Sichtbarkeit - Zeit Diagramm

Erneut lässt sich die Form einer trigonometrischen Funktion erkennen, wozu wir die Funktionsgleichung im nächsten Schritt approximiert haben. Aus den Werten ergibt sich dann folgende Gleichung:

$$f(x) = 0,5 \cdot \sin(0,2131 \cdot (x - 5,29)) + 0,5$$

⁴<https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEhelp/moonorbit.html> (Aufgerufen am 13.01.2017)

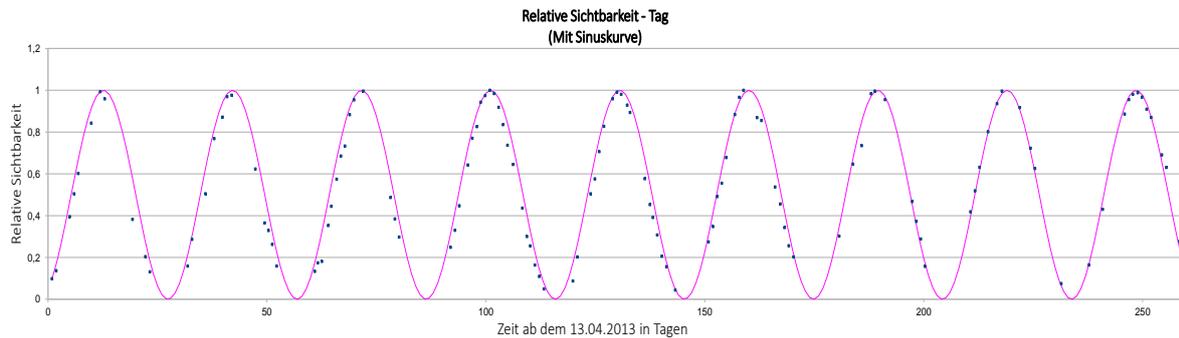


Abb. 10: Sichtbarkeit - Zeit Diagramm mit approximierter Sinuskurve

Die Funktion vom Typ $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ die sich aus den Messwerten ergibt, hat folgende Bedeutungen für die einzelnen Parameter: Der Parameter $d = 0,5$ gibt an, dass der durchschnittliche Funktionswert bei $0,5$ liegt, was zusammen mit dem Parameter $a = 0,5$ bedeutet, dass der gesamte Wertebereich der approximierten Funktion zwischen 0 und 1 liegt. Der Wert der Funktion gibt das Verhältnis der Mondsichel zum gesamten Durchmesser zum jeweiligen Zeitpunkt an. Dabei entspricht $f(x) = 0$ einem Neumond und $f(x) = 1$ dem Vollmond.. Für die Ermittlung der Monatsperiode ist erneut der Parameter $b = 0,2131$ von Bedeutung. Wird 2π durch den Wert von b geteilt, erhält man die synodische Monatsperiode mit einem Wert von $\frac{2\pi}{0,2131} = 29,48468$. $29,48468$ stellt die Länge der synodischen Monatsperiode in Tagen dar. Da die Dauer des synodischen Monats ebenfalls je nach Position von Sonne und Planeten geringfügig schwanken kann, findet man in der Literatur den Wert $(29,553 \pm 0,302)$ Tage⁵. Um die Auswirkung von Messfehlern zu untersuchen, haben wir erneut mittels einer „Monte-Carlo-Simulation“ Messfehler eingebaut. Nach 50 Durchläufen betrug die maximale Abweichung zum ursprünglichen Wert $0,0000515\%$. Damit liegt unser Messwert von $(29,485 \pm 0,000015)$ Tagen ebenfalls vollständig in dem von der Literatur angegebenen Intervall.

4.3 Die Exzentrizität

Wie bereits hergeleitet wurde, lautet die Formel zur Bestimmung der Exzentrizität $\varepsilon = \frac{P_{Max} - P_{Min}}{P_{Max} + P_{Min}}$, wobei für P_{Max} der maximale und für P_{Min} der minimale Funktionswert der schon in 3.1 beschriebenen approximierten Mondradius-Tag-Funktion eingesetzt werden muss. P_{Max} und P_{Min} ergeben sich aus den Parametern $a = 14,23$ und $d = 278,63$. Da die Sinusfunktion zwischen -1 und $+1$ schwankt, ergibt sich $P_{Max} = 14,23 \cdot 1 + 278,63 = 292,83$ und analog $P_{Min} = 14,23 \cdot (-1) + 278,63 = 264,40$. Daraus folgt ein Wert für die Exzentrizität von $\varepsilon = \frac{292,83 - 264,40}{292,83 + 264,40} = 0,051020$. In der Literatur wird eine durchschnittliche Exzentrizität von $0,055546$ angegeben. Dieser Wert weicht von dem von uns um $\frac{0,055546 - 0,051020}{0,055546} \cdot 100\% = 8,1482\%$ ab, was deutlich zu hoch ist um die Berechnung als „erfolgreich“ ansehen zu können.

⁵<https://de.wikipedia.org/wiki/Lunation> (Aufgerufen am 13.01.2017)

Weiterentwicklung

Den Ursprung dieses Fehlers vermuten wir in der starken Abweichung der Amplitude der approximierten Funktion von den tatsächlichen beobachteten Messwerten (Abb. 8). Wie bereits erwähnt, haben wir aus diesem Grund eine Filterfunktion für unser Approximationsprogramm entwickelt, wobei durch das Herausfiltern der Werte nahe der Wendepunkte, die Sinusfunktion besser die Hoch- und Tiefpunkte annähert. Dadurch stimmen die neuen Werte für P_{Max} und P_{Min} , die sich aus den neuen Parametern der approximierten Funktion ergeben, besser mit den tatsächlichen Messwerten überein. Als verbesserte Approximationsfunktion erhielten wir:

$$f(x) = 15,334 \cdot \sin(0,2274824 \cdot (x - 9,1)) + 278,9$$

Aus den neuen Parametern $a = 15,334$ und $d = 278,9$ ergibt sich nach der gleichen Rechnung der Wert $P_{Max} = 294,234$ und $P_{Min} = 263,566$. Daraus folgt ein verbesserter Schätzwert für die Exzentrizität von $\varepsilon = \frac{294,234 - 263,566}{294,234 + 263,566} = 0,054980$. Die Abweichung des neuen Wertes zum Literaturmittelwert beträgt dabei nur noch $\frac{0,055546 - 0,054980}{0,055546} \cdot 100\% = 1,0190\%$, wobei diese geringere Abweichung bei genauem Betrachten auch an der neuen Sinuskurve (Blauer Graph in Abb. 11) sichtbar wird:

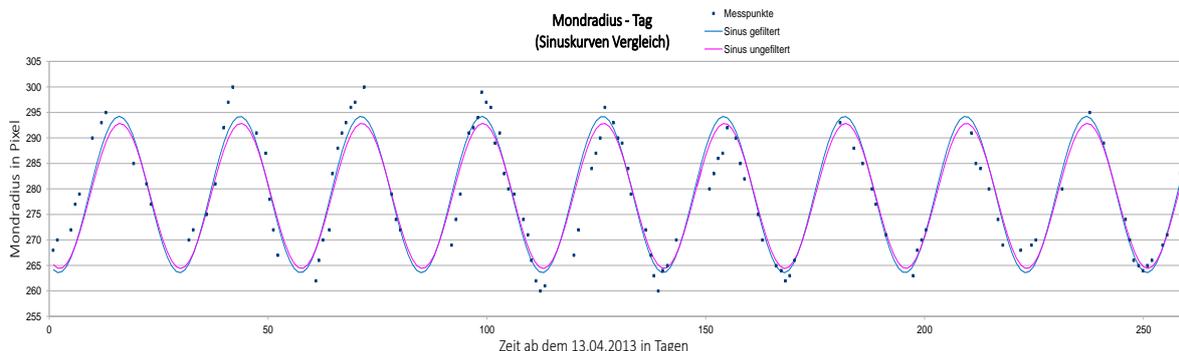


Abb. 11: Mondradius - Zeit Diagramm mit Sinuskurve im Vergleich zur verbesserten Sinuskurve (basierend auf gefilterten Messwerten)

Diese Abweichung kann auch darauf zurückgeführt werden, dass die Mondbahn nicht nur von der Erdanziehungskraft abhängig ist, sondern auch von anderen Himmelskörpern beeinflusst wird. Dadurch ist die Exzentrizität nicht konstant, sodass der Literaturwert nur einen Mittelwert darstellt. Zeigt beispielsweise die große Halbachse der Mondbahnellipse in Richtung Sonne, ist die Exzentrizität relativ groß. Steht sie jedoch senkrecht zur Sonne, ist sie relativ klein. Auch der nicht konstante Abstand vom Erde-Mond-System zur Sonne führt zu periodischen Schwankungen der Exzentrizität (Abb.12). Die bedeutendsten Schwankungen betragen $\pm 0,014217$ mit einer Periode von 31,81 Tagen und $\pm 0,008551$ mit einer Periode von 205,9 Tagen⁶. Das Intervall, in dem die Fotografien aufgenommen wurden, ist mit 267 Tagen lang genug, um eine

⁶<https://de.wikipedia.org/wiki/Mondbahn> (Aufgerufen am 15.12.16)

Schwankung mit der Periode von 32 Tagen vernachlässigen zu können, da sich diese über einen großen Zeitraum ausgleicht. Das 267 Tage lange Intervall beinhaltet allerdings nur eine vollständige Periode der Schwankung von 206 Tagen und einer Abweichung von $\pm 0,008551$. Um trotzdem abzuschätzen, wie gut unsere Messungen sind, haben wir das „HORIZONS-System“ verwendet. Dieses Tool bietet die Möglichkeit, sich die Ephemeriden vieler Körper des Sonnensystems berechnen und beispielsweise in einer .txt Datei ausgeben zu lassen. So hat man auch Zugriff auf die Exzentrizitäten der Mondbahn in dem Intervall, in dem unsere Mondbilder aufgenommen wurden. Man stellt fest, dass sich die Exzentrizitäten ständig ändern (Beispiel: 13. April 2013: 0,50144; 14. April 2013: 0,54027). Die Exzentrizitäten haben wir in eine Exceltabelle übertragen und dort graphisch dargestellt. In Abb.12 ist zu erkennen, dass sich die Exzentrizität nahezu simultan ändert. Mit unserem Verfahren können wir jedoch lediglich die durchschnittliche Exzentrizität im untersuchten Zeitraum bestimmen. Die statistische Messfehleranalyse mit Hilfe einer erneuten Monte-Carlo-Simulation ergab eine durch Messfehler bedingte maximale Abweichung zu unserem zuvor bestimmten Exzentrizitätswert von $\pm 0,0011$. Der Mittelwert der Exzentrizität in unserem Messintervall, den wir aus den HORIZONS-Daten errechnet haben, liegt mit $\varepsilon = 0,0601$ außerhalb der Messfehler bedingten Abweichung. Das liegt vermutlich daran, dass wir durch die Filterung der Messwerte nahe der Wendepunkte zwar eine Sinusfunktion erhalten die die tatsächlichen Messwerte besser annähert, allerdings reduzieren wir dadurch auch stark die Menge der Messwerte, wodurch Lücken in den Messdaten, die aufgrund der Tatsache, dass bei bewölktem Himmel keine Fotos gemacht werden können, unvermeidlich sind, das Ergebnis stärker beeinflussen können. Diesbezüglich und auch aufgrund der langperiodischen Schwankung der Exzentrizität wären noch mehr Messwerte in einem noch längeren Zeitraum nötig um die Exzentrizität der Mondbahnellipse genauer zu bestimmen. Dennoch sehen wir das Verfahren, das wir entwickelt haben und unsere Abschätzung der Exzentrizität unter der gegebenen Voraussetzung, der relativ geringen Messdatenmenge, als erfolgreich an.

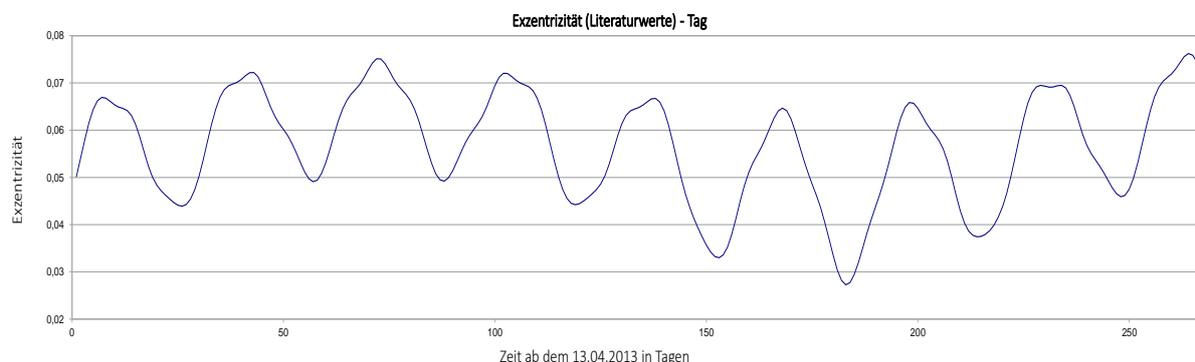


Abb. 12: Schwankung der Exzentrizität

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die Ergebnisse unserer Arbeit zeigen, dass es durchaus möglich ist, sich als Privatperson im Bereich der Astronomie zu betätigen. Wir als kleine Schülergruppe haben es geschafft, nur mit Hilfe einer Digitalkamera die Monatslängen nach verschiedenen Definitionen und die Exzentrizität der Mondbahn zu bestimmen. Dabei ist es uns nicht nur gelungen, mit einfachsten Mitteln die Werte mit sehr geringen Abweichungen zu bestimmen, sondern wir konnten sogar eine einzige Messreihe für mehrere Bestimmungen nutzen. So lässt sich mit dem gleichen Aufwand in unserem Fall die synodische und die anomalistische Monatsperiode mit denselben Messwerten bestimmen, was zusätzlich für unsere einfachen Methoden spricht. Uns interessiert es auch, die Länge des siderischen Monats zu bestimmen. Dazu müssten wir den Mond jedoch mit Hintergrund fotografieren. Damit der Sternenhintergrund diesmal aber sichtbar wird, müssen wir dann den Mond mit Langzeitbelichtungen fotografieren. Aus diesen Bildern müssten wir mit Hilfe des Sternhintergrunds die Rektaszension des Mondes bestimmen. Unter Berücksichtigung der Uhrzeit ließe sich so der siderische Monat bestimmen.

Zusammenfassend konnten wir zeigen, dass es durchaus ohne „Hightech“ möglich ist, genaue Werte bei Forschungen in der Astronomie zu erzielen, was nicht nur einen Erfolg für uns darstellt, sondern auch als Anreiz für andere Hobbyastronomen dienen kann, neue Forschungen zu betreiben, für die ja offensichtlich keine Satelliten oder Lasertechnik benötigt wird, wenn nur genügend Eifer und Forscherdrang vorhanden ist.

6 Danksagungen

An dieser Stelle möchten wir Herrn F.-W. Duttke danken, welcher uns seine Programme „Pixel-GIS“ und „XGraph“ zur Verfügung gestellt hat, sodass wir die Mondradien vermessen konnten. Ein besonderer Dank gilt auch Herrn A. Moritz für das Betreuen dieses Projektes und die Aufnahme und Bereitstellung der Mondbilder, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

7 Quellen- und Literaturverzeichnis

Informationen über das Zustandekommen schwankender Exzentrizitäten der Mondbahn:

Artikel „Das Supermond-Phänomen“ aus „Sterne und Weltraum“, Ausgabe vom Januar 2017.

Mondbahn: <https://de.wikipedia.org/wiki/Mondbahn> (Aufgerufen am 15.12.16)

Monatsdefinitionen: <https://de.wikipedia.org/wiki/Monat> (Aufgerufen am 02.12.16)

<http://www.spektrum.de/lexikon/physik/monat/9944> (Aufgerufen am 12.01.17)

<http://lexikon.astronomie.info/stichworte/Grundlagen.html> (Aufgerufen am 24.03.17)

Synodischer Monat: <http://www.redshift-live.com/de/kosmos-himmelsjahr/lexikon/Synodischer%20Monat.html> (Aufgerufen am 02.12.16)

Anomalistischer Monat: <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEhelp/moonorbit.html> (Aufgerufen am 13.01.2017)

Lunation: <https://de.wikipedia.org/wiki/Lunation> (Aufgerufen am 02.12.16)

HORIZONS-System: <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

Bildquellen: <http://www.spektrum.de/alias/bilder/der-variable-scheinbare-durchmesser-des-mondes/1304183> (Aufgerufen am 12.01.17)

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gibbous-Crescent-half-ellipse-in-circle.png> (Aufgerufen am 03.12.16)

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/Ecliptic.svg> (Aufgerufen am 24.03.17)