

Fortsetzung des Artikels ***Mondtag und Gezeiten*** in der Zeitschrift

Astronomie + Raumfahrt i.U. 50 (2013), Heft 3/4

von Albrecht Schultz

Die Teilschwingungen (Partialtiden) der fluterzeugenden Kraft

Wir betrachten das Zusammenspiel von Mond und Sonne von einer anderen Warte aus. Wenn sich zwei Tonschwingungen mit wenig verschiedenen Frequenzen überlagern, nimmt man ein periodisch wechselndes An- und Abschwollen der Amplitude wahr, man nennt das „Schwebung“. Der Gezeiten-Verlauf in Diagramm 3 ähnelt dem Oszillogramm einer akustischen Schwebung, bei der die Teilschwingungen ungleiche Amplituden haben. In der Tat treffen an einem festen Ort zwei Oszillationen mit geringem Frequenzunterschied aufeinander: Die Gezeitenwirkung des Mondes mit der Periode des halben Mondtages von 12,42 h und die schwächere der Sonne mit exakt 12 h. In der Akustik ist die Differenz der Einzelfrequenzen die Schwebungsfrequenz; das ist auch hier der Fall, denn $\frac{1}{12,00\text{ h}} - \frac{1}{12,42\text{ h}} = \frac{1}{354,86\text{ h}} \approx \frac{1}{14,8\text{ d}}$; die Periode ist wie erwartet der halbe synodische Monat. In diesem Zeitabstand wiederholen sich gleiche Phasenlage der fluterregenden Kräfte von Mond und Sonne (die Kräfte beider Himmelskörper wirken bei Neu- und Vollmond in etwa gleiche Richtungen) –, ebenso wie in der Akustik die Schwebungsperiode durch das Wiedereintreten jeweils gleicher Phasenlage der Teilschwingungen bestimmt ist. Mit obiger Gleichung haben wir eine zweite Möglichkeit in der Hand, die Dauer eines Mondtages rechnerisch zu ermitteln, diesmal aus der synodischen statt der tropischen Monatslänge.

Diese Aufteilung in vorerst zwei Teilschwingungen muss erweitert werden; es kommen Komponenten hinzu, die den schon erwähnten Charakteristika der Bewegungen von Sonne und Mond relativ zur Erde Rechnung tragen; darunter fallen die Schiefe der Mondbahn, die Ekliptikschiefe, Elliptizität, Knotenbewegung. Die Mathematiker können für das Potential der Gezeitenkräfte solche Änderungen als Summe von Sinus- und Kosinusgliedern von jeweils gegebener Frequenz darstellen. Die einzelnen Summanden bezeichnet man als „Tiden“ oder „Partialtiden“, das Ganze stellt sich als „Harmonische Entwicklung des Gezeitenpotentials“ dar. Von den Reihengliedern gibt es sehr viele, aber in der Praxis genügt eine verhältnismäßig kleine Zahl, um die Hauptänderungen zu erfassen. Tabelle 3 enthält einige der wichtigsten Teilschwingungen. Die Periodenlängen der Partialtiden sind durch die Theorie gegeben – sie gehören den theoretischen Gezeiten eines die ganze Erde umspannenden Weltmeeres an –, aber in der physischen Realität sind ihre Amplituden und Phasen ortsgebunden und müssen jeweils aus laufenden Registrierungen der Wasserstände abgeleitet werden. Diese „Partialtidenanalyse“ stellt die harmonischen Schwingungen so dar, dass die Summe in jedem Moment der tatsächlichen fluterzeugenden Kraft entspricht, und damit sind die Vorausberechnungen für jeden Küstenort möglich.

Wir können uns an einer Simulation des Gezeitensignals von Diagramm 3 (das selbst eine Vorausberechnung / Simulation darstellt) versuchen. Eine Schwingung mit der Periode 12,42 h (halber Montag) wird mit der 12,00 h- Schwingung des Sonneneinflusses kombiniert. Liegt die Wasserhöhe $h(t)$ im zeitlichen Mittel bei 0 m NN, so lässt sich die Überlagerung der beiden harmonisch gedachten Schwingungen – ohne Phasenunterschied – mit der Formel

$$h(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t)$$

beschreiben; dabei ist

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{0,5175 \text{ d}}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{0,50 \text{ d}},$$

und die verstreichende Zeit t wird in Tagen gemessen. Das Ergebnis ist in Diagramm 4a dargestellt. Der Graph gibt die Abfolge der Nipp- und Springtiden wieder, wir haben hier die Modulation der Gezeiten grob erfasst. Für die Amplituden ist $A_1 = 1 \text{ m}$ und $A_2 = 0,3 \text{ m}$ eingesetzt, deshalb betragen die Amplituden bei Spring- und Nippflut in diesem Beispiel 1,3 m bzw. 0,7 m.

Wenn wir in unserer „Partialtidensynthese“ der *täglichen Ungleichheit* (siehe oben) Rechnung tragen wollen, müssen wir dem halbtägigen M_2 -Signal ein *ganztägiges* mit geringerer Amplitude hinzufügen. Dadurch wird jedes zweite Hochwasser noch etwas höher, entsprechend geschieht es mit dem Niedrigwasser. Wie schon bemerkt verschiebt sich der Effekt mit der Zeit, deshalb erhält die der dominanten M_2 -Gezeit hinzugefügte Schwingung in der Simulation nicht exakt die doppelte Periode; verwirklicht ist dies durch die sog. K_1 -Tide mit der Periode „1 siderischer Tag“ ([10], S.47). Das Ergebnis ist in Diagramm 4b festgehalten. Die Zuständigkeit der K_1 -Tide begründet sich aus der Vorstellung, dass Sonne und Mond in geozentrischer Sicht als Massenringe um die Erde gedacht werden können. Die Ringe üben ein raumfestes Kräftemuster auf die Erde aus; da sie nicht in der Äquatorebene liegen, hat ein bestimmter Kraftanteil in einem mit der rotierenden Erde verbundenen Koordinatensystem die Periode „1 siderischer Tag“ [4].

Um die entfernungsbedingte Amplitudenmodulation einzubringen, müssen wir die Partialtiden hinzufügen, welche mit der Elliptizität der Bahnen verknüpft sind. In Diagramm 4c ist die in Tabelle 2 aufgeführte „elliptische Mondtide“ mit der Periode von 12,66 h hinzugekommen, das Schwingungsbild, das jetzt den Ausschnitt eines länger-periodischen Gesamtbildes darstellt (siehe die besonderen Tagesnummern), entspricht der Konstellation Voll- oder Neumond im Apogäum, und daraufhin Neu- oder Vollmond im Perigäum. Nach dieser schrittweisen Verfeinerung des Modells besteht noch kein Anspruch auf richtige Darstellung eines Gezeitenverlaufes, es bedarf schon einer größeren Auswahl an Partialtiden und einer korrekten Wahl ihrer Amplituden und Phasen (was in der Praxis mit Standard-Rechenverfahren gelingt [10] S. 37 f.). Man sieht aber, dass sich mit nur wenigen Komponenten und ein wenig Probieren der prinzipielle Verlauf des Gezeitensignals leidlich nachbilden lässt.

Bezeichnung	Symbol	Periode in h
Hauptmondtide	M_2	12,42
Hauptsonnentide	S_2	12,00
Haupt-Deklinationstide	K_1	23,93
Hauptmondtide	O_1	25,82
Hauptsonnentide	P_1	24,07
Elliptische Mondtide	N_2	12,66

Tabelle 3 Wichtige Komponenten der fluterzeugenden Kraft (aus [9]).

Der angehängte Index in den Symbolen weist auf die ungefähr ganztägige oder halbtägige Schwingung hin.

Historisches

Die Erscheinung von Ebbe und Flut war in der Menschheitsgeschichte bis in die Neuzeit hinein ein großes Rätsel, Anlass zum Sinnen und Forschen, zur Mythenbildung und auch zu bizarren Spekulationen.

Dass Ebbe und Flut mit dem Mondumlauf in Zusammenhang stehen, war dem griechischen Philosophen und Astronomen *Posidonius* (131 – 51 v. Chr.) während eines Aufenthaltes an der spanischen Atlantikküste aufgefallen ([13], S. 101 und 111) – der exponierte Ort muss deshalb erwähnt werden, weil am Mittelmeer, in der Welt der Griechen und Römer, die Gezeiten ganz unbedeutend und scheinbar unregelmäßig sind. *Gaius Julius Cäsar*, musste deshalb nach seinem Übersetzen auf Britannien während einer Springflut unliebsame Überraschungen erleben; er hatte noch das Pech, dass die Springflut bei schlechtem Wetter einsetzte und zur Sturmflut ausartete (De Bello Gallico, Lib. IV, Kap. 29). *Posidonius* selbst ist in der Astronomie-Geschichte kein Unbekannter: Von ihm stammen Werte für den Erdradius, die Sonnenentfernung und den Sonnendurchmesser.

Die schrittweise Aufklärung der Verhältnisse begleitete große Entwicklungsschübe der modernen Naturwissenschaft. Einige der bedeutendsten Gelehrten des Abendlandes leisteten ihre Beiträge. Tastende Versuche gab es zu Beginn des 17. Jahrhunderts von *Galileo Galilei*, *Simon Stevin*, *René Descartes*, *Johannes Kepler*. *Galilei* führte ein Zusammenwirken der täglichen Erdrotation mit der jährlichen Bewegung der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne als Gezeitenursache an [14]: Auf der sonnenabgewandten Seite sollte die Bewegung des Wassers heftiger sein als auf der Sonnenseite, denn hier addierten sich Bahngeschwindigkeit und Rotationsgeschwindigkeit, und auf der Gegenseite sollten sie sich subtrahieren; deshalb müssten die Wassermassen auf der Nachtseite der Erde mitgerissen, auf der Tagseite abgebremst werden, und das würde zum regelmäßigen Aufstauen führen. Indem sich *Galilei* Ebbe und Flut auf diese (falsche) Weise erklärte, meinte er auch, über einen Nachweis für den Umlauf der Erde um die Sonne zu verfügen. Er hatte also den richtigen Tatbestand mit einem falschen Argument stützen wollen (zugunsten des Kopernikanischen Systems fand er aber auch andere, zutreffende Argumente); im Zusammenspiel von Sonnenumlauf und Eigenrotation der Erde ergäbe sich übrigens ein ganztägiger Gezeitenrhythmus. *Galilei* tadelte in dieser Angelegenheit sogar *Johannes Kepler*, der wie *Stevin* richtig auf eine Anziehung durch den Mond geschlossen hatte ([13], S.198). *Kepler* gebrauchte für seinen Erklärungsversuch magnetische Analogien ([15], S.140 f). *Descartes* stellte sich einen weltraumfüllenden Äther vor, der unterhalb des Mondes zusammengedrückt und dichter sei, was zu einer vermehrten Reibung führen sollte und die Wassermassen beeinflussen müsste ([10], S.23). Am Ende des 17. Jahrhunderts erst erfolgte die prinzipiell richtige Deutung: *Isaac Newton* konnte in Anwendung seines Gravitationsgesetzes die verursachenden Kräfte identifizieren. In Buch III der *Principia* stellte er in vereinfachender Weise eine „statische“ Theorie der Gezeiten vor; diese „Gleichgewichtstheorie“ beschreibt die oben erwähnte Deformation eines die ganze Erde bedeckenden Ozeans, benutzt das Bild der Flutberge auf den dem Mond zu- und abgewandten Seiten der Erde; wie *Newton* auch selbst wusste, ist dieses Bild viel zu grob, es entspricht kaum der Wirklichkeit. Ein Jahrhundert später entwickelte *Pierre Simon de Laplace* die „dynamische Theorie“ der Gezeiten, in der auch die Bewegungen, die Gezeitenströme vorkommen; sie ist wesentlich genauer als die Gleichgewichtstheorie, aber auch wesentlich komplexer. Hier werden die zur Mondrichtung fest stehenden Flutberge von globalen Meereswellen, angetrieben

durch die Gezeitenkräfte, abgelöst; die schwingungsfähigen Systeme der ozeanischen Becken bekommen ihren Rhythmus von außen aufgezwungen, antworten aber in jeweils eigener Weise. *William Thomson (Lord Kelvin)* entwickelte um das Jahr 1867 die harmonische Analyse der Gezeiten. Wenn hier einzelne Namen erwähnt werden, muss auch bedacht werden, dass fast immer in der Wissenschaft die Beiträge *vieler* Forscher einen Durchbruch vorbereiten und begleiten.

Mit den Fortschritten in der Untersuchung von Turbulenzen in Flüssigkeiten, mit der Entdeckung der Nichtlinearität erfolgten wesentliche Weiterentwicklungen der klassischen Theorien (u.a. *Henri Poincaré*, Beginn des 20. Jahrhunderts). Damit wurde man sich auch des Unvorhersehbaren und – wenn es um Details geht – der prinzipiellen Unberechenbarkeit bewusst.

Wenn wir die Ebene der Wissenschaft verlassen und uns vergegenwärtigen, dass unzählige Menschen bis in die Gegenwart hinein gezwungen waren, mit den Rhythmen der Natur zu leben, kann kein Zweifel aufkommen: Dass die Gezeiten an die Mondbewegung gekoppelt und zusätzlich nach den Mondphasen rhythmisiert sind, wussten Seeleute schon seit Jahrtausenden.

Ausblick: Gezeitenkräfte anderswo

Einige Erscheinungsformen sollen nur kurz angerissen werden:

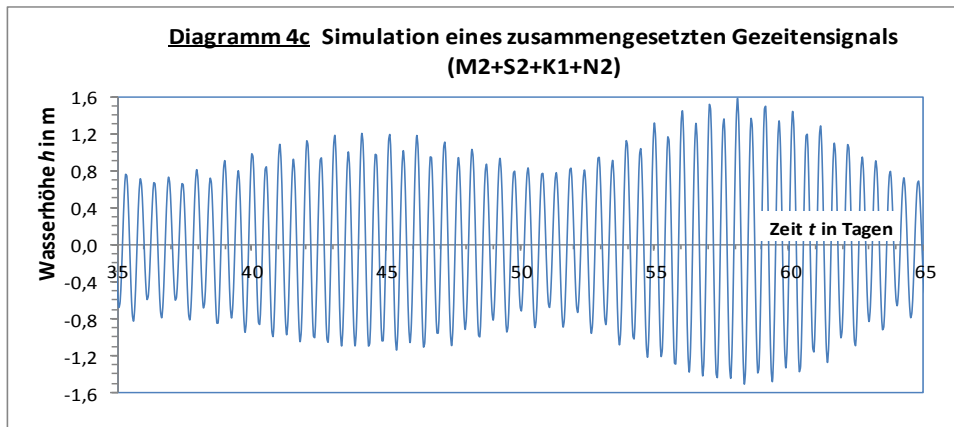
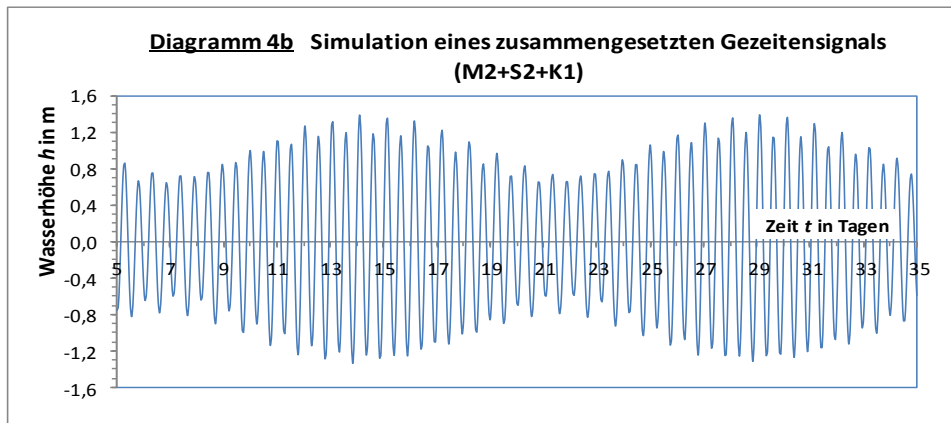
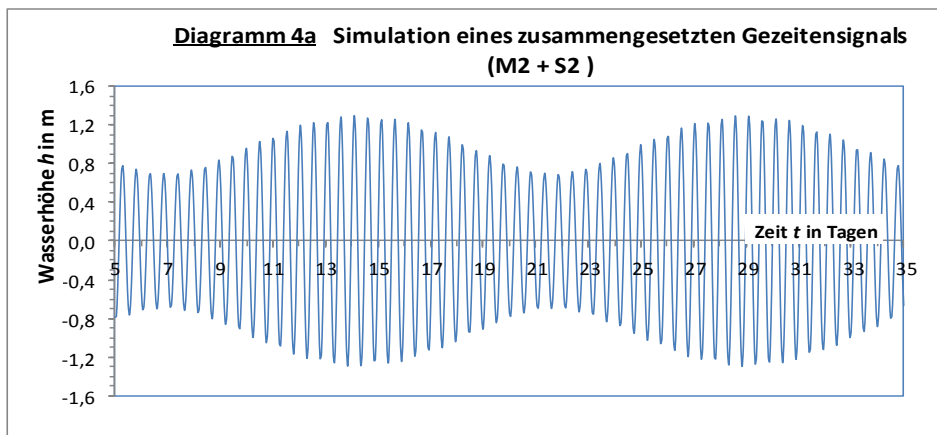
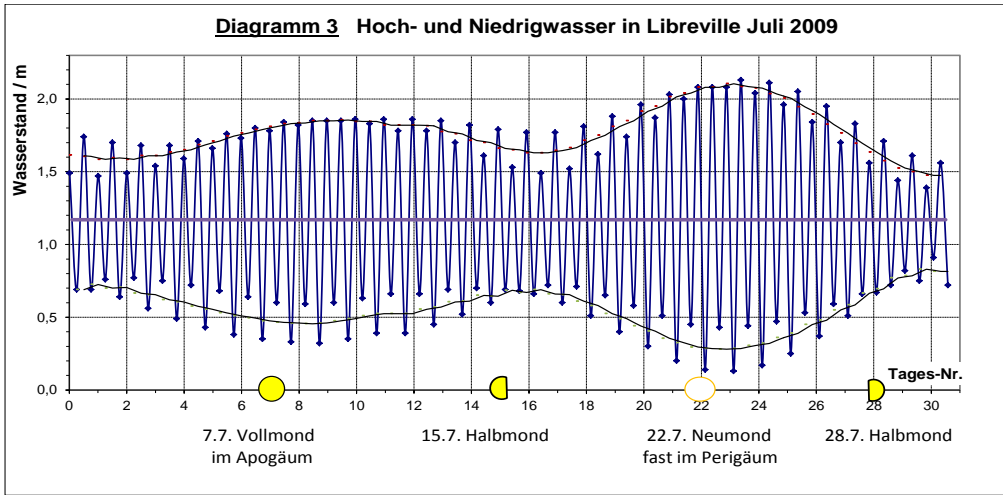
- Gezeitenkräfte sind besonders stark, wenn Monde enge Bahnen um massereiche Planeten ziehen. Z.B. erzeugen die mit den Gezeiten verbundenen Reibungskräfte im Innern des Jupitermondes Io die zum dortigen Vulkanismus nötige Hitze.
- Die Ringsysteme der großen Planeten weisen auf einen kritischen Abstand hin, bei dem die wirkenden Kräfte groß genug sind, um ganze Himmelskörper auseinanderzureißen oder gar nicht erst entstehen zu lassen („Rohegrenze“).
- In den Weiten des Weltraumes spielen sich gigantische Gezeiten-Wechselwirkungen ab. Nahbegegnungen von Galaxien führen zu Störungen, die oft mit Sternentstehungsausbrüchen einhergehen. Nicht selten kommt es dazu, dass die größere Galaxie eine kleinere „verspeist“.

Literatur:

[13] Simonyi, K.: Kulturgeschichte der Physik. H. Deutsch, Thun / Frankfurt a.M. 1995

[14] Galileo Galilei: Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme – Vierter Tag. (Herausgeber: Sexl, R. und Meyenn, K.) B.G.Teubner, Stuttgart 1982, S. 445 ff

[15] Teichmann, J.: Wandel des Weltbildes. Deutsches Museum, München 1983



Ergänzung zum Zeitschriften-Artikel *Mondtag und Gezeiten* in ASTRONOMIE + RAUMFAHRT i.U. 50 (2013), Heft 3/4

von Albrecht Schultz

Formeln zur Gezeitenbeschleunigung

In **Bild 4** ist S_E der Erd-Schwerpunkt, S_M der Mond-Schwerpunkt, P ein Punkt der Erdoberfläche. S_E ist zugleich der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, S_M liegt auf der positiven x -Achse. R_E sei der Erdradius, r der Abstand $\overline{PS_M}$, r_M der Abstand $\overline{S_E S_M}$, ϑ der Polarwinkel des Punktes P . Außerdem sind die Beschleunigungsvektoren \mathbf{a}_P , \mathbf{a}_S , \mathbf{a}_{Gez} , die im Zeitschriftenteil definiert wurden, eingezeichnet (Vektoren sind hier fett gedruckt; der Fettdruck entfällt, wenn ihre Beträge gemeint sind.) α ist der Winkel zwischen der x -Komponente des Vektors \mathbf{a}_P und dem Vektor selbst (siehe die Teilskizze in Bild 4).

Für die folgenden Rechnungen können einige Näherungen benutzt werden: Wegen $R_E \ll r_M$ ($R_E \approx \frac{1}{60} r_M$) wird $\frac{R_E^2}{r_M^2}$ gegenüber $\frac{R_E}{r_M}$ vernachlässigt. Es gilt $a_P^{(x)} = a_P \cdot \cos \alpha$; weil α sehr klein ist, kann der Betrag des Vektors \mathbf{a}_P mit dem Betrag seiner x -Komponente gleichgesetzt werden, $a_P \approx a_P^{(x)}$ ($0 \leq \alpha \leq \arcsin \frac{1}{60} \approx 0,95^\circ \Rightarrow 1 \geq \cos \alpha > 0,99986$).

Gemäß den Ausführungen im Zeitschriftenteil setzt sich die Gezeitenbeschleunigung \mathbf{a}_{Gez} zusammen aus der Gravitationsbeschleunigung \mathbf{a}_P zum Mond hin und dem Gegenvektor der Beschleunigung \mathbf{a}_S zur Sonne hin:

$$\mathbf{a}_{Gez} = \mathbf{a}_P - \mathbf{a}_S. \quad (1)$$

Von diesem Vektor nehmen wir uns die x -Komponente vor:

$$a_{Gez}^{(x)} = a_P^{(x)} - a_S^{(x)} \approx a_P - a_S$$

($a_S^{(x)}$ und a_S stimmen exakt überein),

$$a_{Gez}^{(x)} = \frac{G \cdot M}{r^2} - \frac{G \cdot M}{r_M^2} = G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_M^2} \right) \quad (2)$$

(G : Gravitationskonstante, M : Mondmasse). In dieser Formel wird r^2 mittels des Kosinus-Satzes durch einen Term mit dem Winkel ϑ und den Abständen r_M , R_E ausgedrückt:

$$r^2 = r_M^2 + R_E^2 - 2r_M R_E \cdot \cos \vartheta,$$

$$r^2 = r_M^2 \left(1 + \frac{R_E^2}{r_M^2} - 2 \frac{R_E}{r_M} \cdot \cos \vartheta \right) \approx r_M^2 \left(1 - \frac{2R_E}{r_M} \cdot \cos \vartheta \right).$$

Aus (2) wird dann: $a_{Gez}^{(x)} = G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_M^2 \left(1 - \frac{2R_E}{r_M} \cdot \cos \vartheta \right)} - \frac{1}{r_M^2} \right)$. Unter Berücksichtigung von

$$\frac{1}{1-z} \approx 1 + z, \text{ wenn } |z| \ll 1, \text{ folgt}$$

$$a_{Gez}^{(x)} \approx G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_M^2} \cdot \left(1 + \frac{2R_E}{r_M} \cdot \cos \vartheta \right) - \frac{1}{r_M^2} \right).$$

Das vereinfacht sich zu

$$a_{Gez}^{(x)} \approx \frac{2G \cdot M}{r_M^3} \cdot R_E \cdot \cos \vartheta. \quad (3)$$

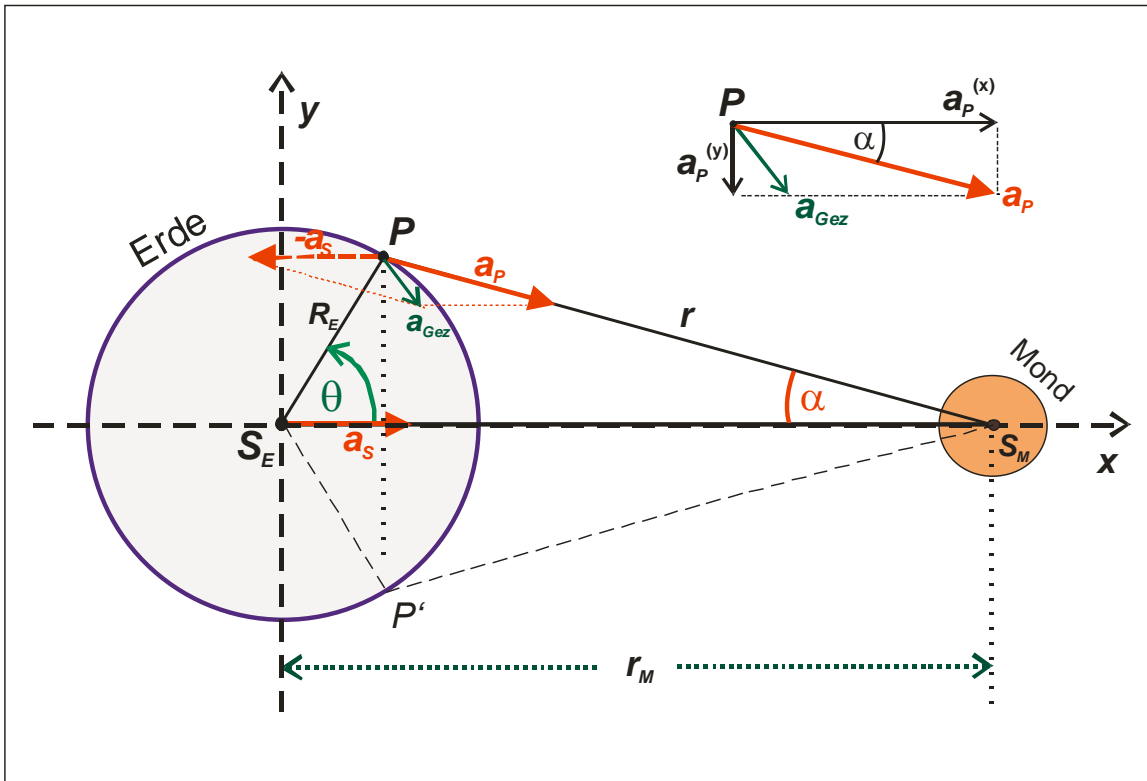


Bild 4 Zur Herleitung der Formeln für die Gezeitenkraft

Für die y -Komponente der Gezeitenbeschleunigung gilt nach Formel (1):

$$a_{Gez}^{(y)} = a_P^{(y)} - a_S^{(y)} = a_P^{(y)} - 0. \quad (4)$$

Im Fall, dass P oberhalb der x -Achse liegt ($\vartheta < 180^\circ$), entnimmt man dem Vektordiagramm im oberen Teil von Bild 4: $a_P^{(y)} = -a_P \cdot \sin \alpha$ (mit dem Minuszeichen ist berücksichtigt, dass die Komponente $a_P^{(y)}$ in die negative y -Richtung weist). Im selben Fall gilt im Dreieck $S_E S_M P$

$$\sin \alpha = \frac{R_E \cdot \sin \vartheta}{r} \approx \frac{R_E \cdot \sin \vartheta}{r_M},$$

wir haben folglich $a_P^{(y)} \approx -a_P \cdot \frac{R_E \cdot \sin \vartheta}{r_M}$; zusammen mit $a_P = \frac{G \cdot M}{r^2} \approx \frac{G \cdot M}{r_M^2}$ wird dann aus (4)

$$a_{Gez}^{(y)} \approx -\frac{G \cdot M}{r_M^3} \cdot R_E \cdot \sin \vartheta. \quad (5)$$

Für den Fall, dass P unterhalb der x -Achse liegt ($180^\circ \leq \vartheta < 360^\circ$) ergibt sich Kraft einer Achsenspiegelung des Punktes P sowie der Vektoren \mathbf{a}_P und $-\mathbf{a}_S$ in Bild 4 dieselbe Formel; eine Vorzeichenänderung im \sin -Term gewährleistet, dass die Komponente $a_{Gez}^{(y)}$ jetzt positiv wird und nach oben weist.

Wir setzen $a_0 := \frac{2G \cdot M}{r_M^3} \cdot R_E$, dann ergibt sich für (3) und (5) kürzer:

$$a_{Gez}^{(x)} \approx a_0 \cdot \cos \vartheta, \quad a_{Gez}^{(y)} \approx -\frac{a_0}{2} \cdot \sin \vartheta.$$