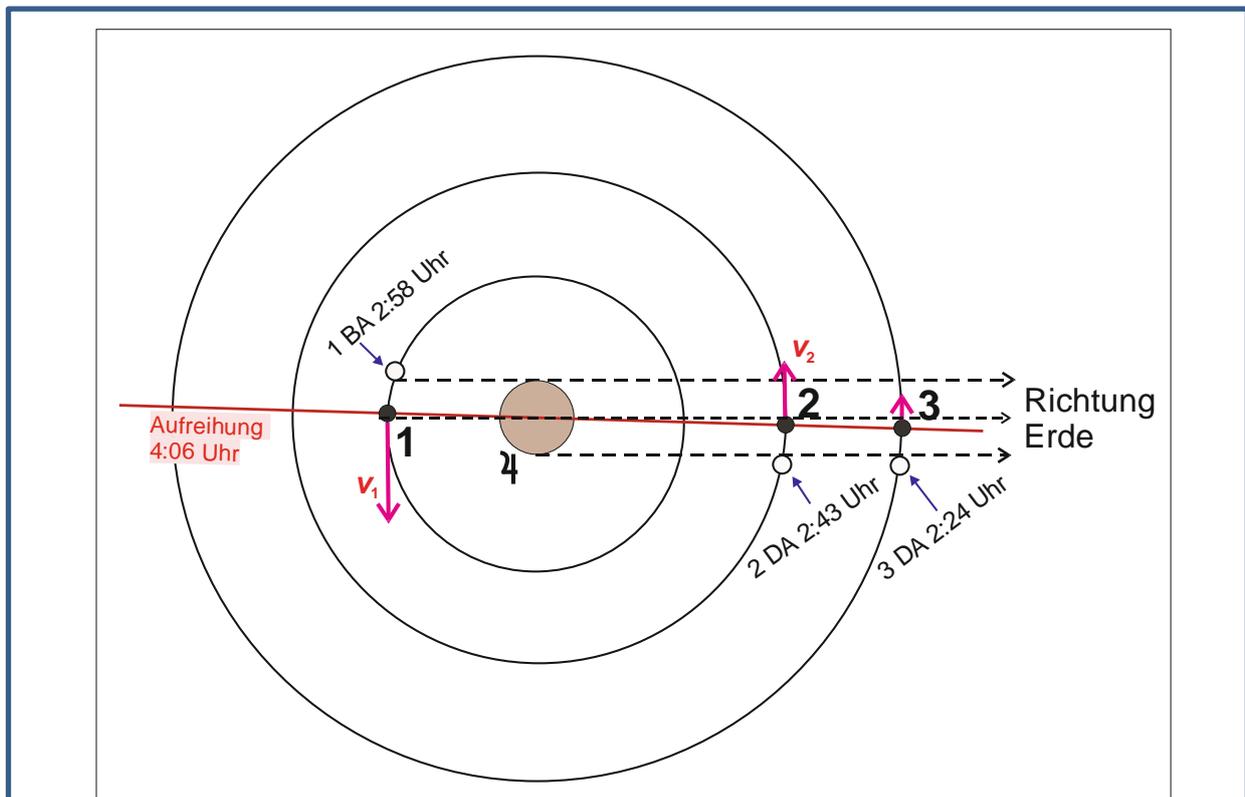


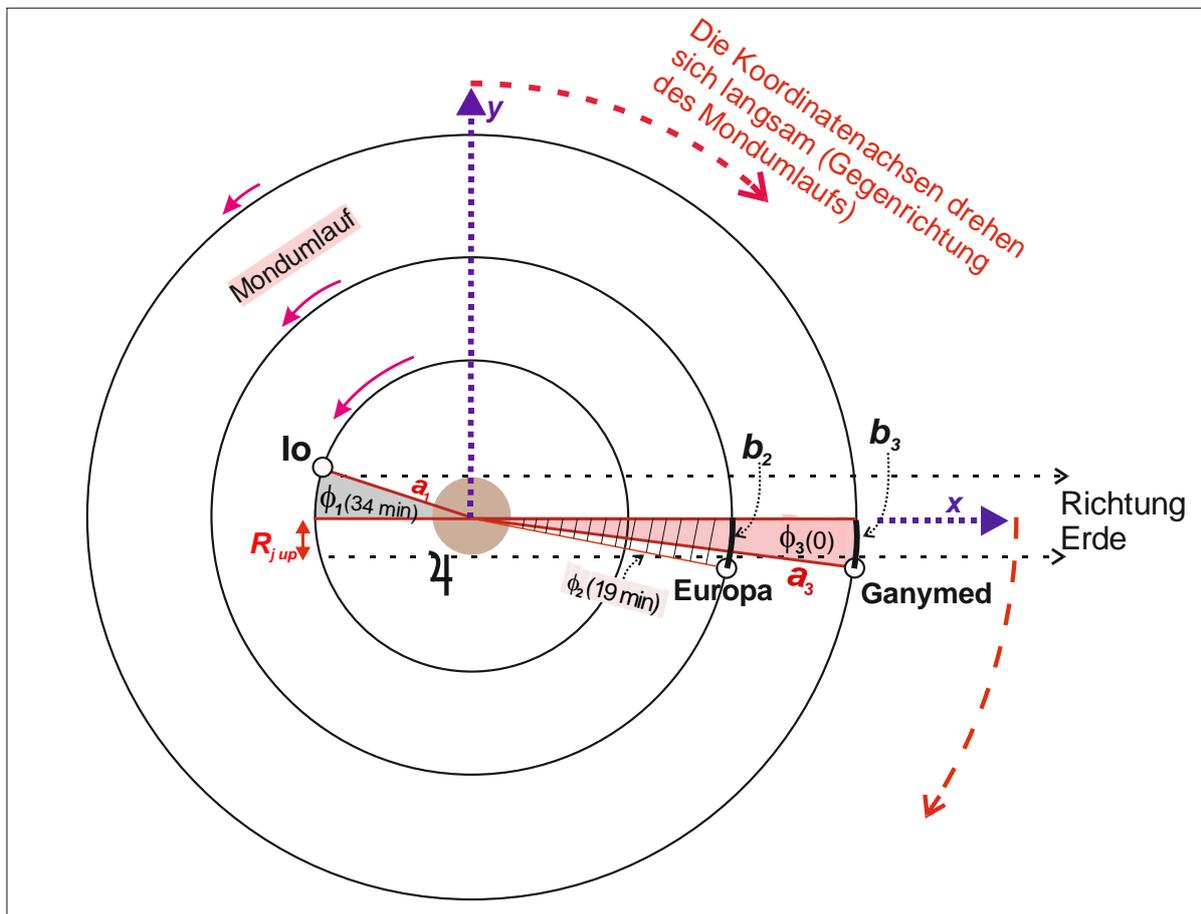
**Ergänzung zum Zeitschriftenartikel „Die Laplace-Resonanz in Jupiters Satellitensystem“
(ASTRONOMIE + RAUMFAHRT im Unterricht Heft 6/2019, S. 37-42)**

Die nachfolgende Skizze – Bild 2 aus dem Zeitschriftenartikel – zeigt schematisch den Planeten Jupiter zusammen mit den Umlaufbahnen der Monde *Io*, *Europa*, *Ganymed* („Monde 1, 2, 3“). Die Draufsicht lässt glauben, dass die gemeinsame Umlaufebene der Monde um Jupiter sowie die Umlaufebenen von Jupiter und Erde um die Sonne in der Zeichenebene zusammenfallen. In Wahrheit beträgt die Neigung der Jupiterbahn gegen die Ekliptik $1,3^\circ$, und die Umlaufebene der drei Monde - Jupiters Äquatorebene - ist um ca. 3° gegen die Jupiterbahn geneigt. Diese Winkel sind so klein, die Bahnradien der Monde so kurz, dass von der Erde aus Bedeckungen der Monde durch Jupiter und Durchgänge vor Jupiter beobachtet werden können. Es kommt regelmäßig zu der Situation, dass Jupiter nahe der Schnittpunktlinie seiner Umlaufebene mit der Ekliptik steht und die Schnittpunktlinie von Jupiters Äquatorebene mit seiner Umlaufebene zur Erde weist; dann ergibt sich weitgehende Koplanarität der im Bild aufgeführten Himmelskörper, Durchgangsspuren teilen die Jupiterscheibe in annähernd gleich große Hälften, entsprechend ist es mit den Bedeckungen. Am 27.08.09 war man einer solchen Situation nahe: Die jovizentrische Breite der Erde betrug $0,43^\circ$, d.h. vom Zentrum des Planeten Jupiter aus stand die Erde $0,43^\circ$ über dessen Äquatorebene.



Die nicht-ausgefüllten kleinen Kreise stellen die drei Satelliten in ihren Positionen - erdbezogen - während eines Bedeckungsanfangs (BA) durch Jupiter bzw. Durchgangsbeginns (DA) vor dem Planeten dar. Diese Kontakte kamen am 27.08.2009 erdbezogen zu den jeweils angegebenen Uhrzeiten zustande, sie sind in den einschlägigen astronomischen Jahrbüchern angegeben. Die ausgefüllten kleinen Kreise zeigen die Monde in einer Aufreihung, die für einen bestimmten Zeitpunkt nach den drei Ereignissen BA/DA erwartet wird. Dazu gibt es in den Jahrbüchern keine direkten Hinweise. Ausgehend von den Umlaufzeiten und Bahnhalbmessern der Monde – siehe die Tabelle unten – sowie den BA/DA-Zeitpunkten kann aber gezeigt werden, dass sich die anvisierte Reihung wenig später tatsächlich einstellt; die Linie ist im Bild rot gezeichnet (sie dreht sich langsam um das Jupiterzentrum). Die entsprechende Uhrzeit ergibt sich aus den Rechnungen.

Für die kleinen Rechnungen orientieren wir uns an der Skizze unten. Über das Satellitensystem ist ein Bezugssystem gelegt, dessen x -Achse anfänglich zur Erde weist und sich gegenüber den Fixsternen mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_P = -0,01291 \text{ d}^{-1}$ um das Jupiterzentrum dreht. Die den siderischen Umlaufzeiten entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ der drei Monde ändern sich in diesem System zu $\omega_1 - \omega_P, \omega_2 - \omega_P, \omega_3 - \omega_P$ (siehe Zeitschriftenartikel).



Wir gehen von „3 DA“ aus und nehmen die Uhrzeit dieses Ereignisses (2:24 Uhr MEZ) als Nullpunkt der Zeitskala. Es ist dies auch der Moment, in dem die x -Achse zur Erde weist. Momentan hat auf der *Ganymed*-Bahn der Bogen b_3 vom Mondzentrum bis zum Schnittpunkt mit der x -Achse die ungefähre Länge $R_{Jup} + R_3$ (R_3 : Mond-Halbmesser), und das Bogenmaß des zugehörigen Winkels φ_3 – Scheitelpunkt ist das Jupiterzentrum – berechnet sich über die Formel

$$\varphi_3(0) \approx (R_{Jup} + R_3)/a_3 ;$$

während *Ganymed* auf seiner Bahn um Jupiter fortschreitet, vermindert sich φ_3 gemäß der Formel

$$\varphi_3(t) = \varphi_3(0) - (\omega_3 - \omega_P) \cdot t$$

und annulliert sich im Moment, wo das Zentrum *Ganymeds* die x -Achse trifft. (Hier ist vorausgesetzt, dass die Durchgangsspur die Jupiterscheibe in zwei gleichgroße Hälften teilt. Wie erwähnt trifft dies in guter Näherung zu.)

Um 2:43 Uhr, 19 min nach der Zeitmarke 0, findet „2 DA“ statt, und wir haben für den Winkel, den die Verbindungslinie *Zentrum Jupiter – Zentrum Europa* mit der x -Achse bildet, analog zu $\varphi_3(0)$ die Formel

$$\varphi_2(19 \text{ min}) \approx (R_{Jup} + R_2)/a_2 ;$$

und dieser vermindert sich mit fortschreitender Zeit gemäß der Formel

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(19 \text{ min}) - (\omega_2 - \omega_p) \cdot (t - 19 \text{ min}).$$

Währenddessen läuft *Ganymed* vor der Jupiterscheibe dem zweiten Mond noch voraus, aber mit der Zeit verringert sich beider Winkelabstand.

Um 2:58 Uhr (1 BA, $t = 34$ min) berechnet sich der Winkel φ_1 auf der Gegenseite (*Io* betreffend) über die Formel

$$\varphi_1(34 \text{ min}) \approx (R_{Jup} + R_1)/a_1 ;$$

Dieser vermindert sich mit fortschreitender Zeit in Analogie zu den erstgenannten Fällen gemäß der Formel

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(34 \text{ min}) - (\omega_1 - \omega_p) \cdot (t - 34 \text{ min}).$$

Währenddessen werden auch die Winkel φ_2 , φ_3 immer kleiner.

Im folgenden Diagramm ist der Verlauf der Winkelbeträge $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ wiedergegeben, als Resultat des beigefügten Excelblattes. Man sieht: noch bevor einer der Winkel den Wert Null annimmt, treffen sich die entsprechenden Geraden in einem Punkt; zum Zeitpunkt $t = 102$ min ergibt sich (annähernd) Gleichheit für alle drei Winkel. Das heißt: die im ersten Bild skizzierte Aufreihung ist realisiert. 102 Minuten nach „3 DA“, um 4:06 Uhr MEZ (für den Beobachter auf der Erde), stehen im drehenden Koordinatensystem die drei Monde auf einer Linie.

Diese Aufreihung wiederholt sich mit schöner Regelmäßigkeit auf der sich drehenden x -Achse; seit Galileis Zeiten gab es immer wieder Gelegenheiten, sie zu beobachten.

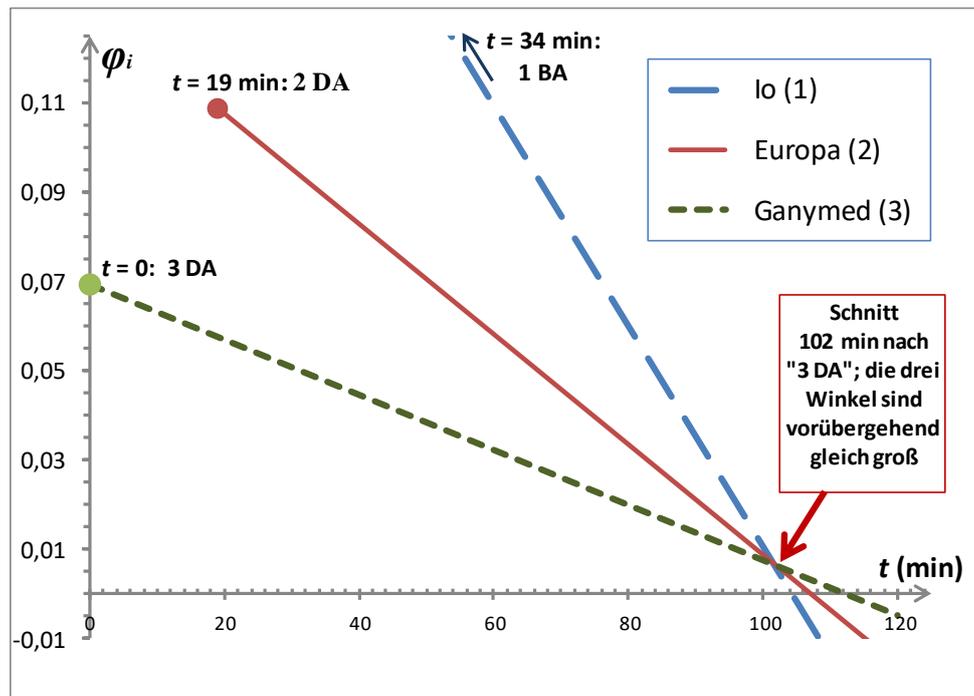


Tabelle 1 Daten Galileischer Monde (siehe Zeitschriftenartikel)										
a_n : große Halbachse T_n : Umlaufdauer ω_n : Winkelgeschwindigkeit R_n : Mondhalbmesser										
Jupitermond	n	a_n (10^3 km)	T_n^{sid} (d)	T_n / T_1	ω_n (d^{-1}) (min^{-1})		R_n (km)	$\omega_n - \omega_p$ (min^{-1})	$b_n = R_J$ + R_n (km)	
Io	1	421,67	1,769137	1,000	3,551554	0,002466	1821	0,002475	73313	
Europa	2	670,9	3,551182	2,007	1,769322	0,001229	1565	0,001238	73057	
Ganymed	3	1070	7,154554	4,044	0,878208	0,000610	2634	0,000619	74126	
$\omega_p = -0,013 \text{ d}^{-1} = -9E-06 \text{ min}^{-1}$				Äquatorradius Jupiter: $R_J = 71492 \text{ km}$						
2:58 Uhr: 1 BA			2:43 Uhr: 2 DA			2:24 Uhr: 3 DA (MEZ, am 27.08.09)				