

Die ekliptikale Mondlänge in der Ephemeridenrechnung

von **Albrecht Schultz**

Die Frage war gestellt worden, auf welche Weise die aus Zahlenkolonnen bestehenden Ephemeriden eines Wandelsternes zustande kommen, insbesondere wie die Störungen durch benachbarte Himmelskörper eingearbeitet werden. Dies wird hier in aller Kürze exemplarisch für die ekliptikale Länge λ des Mondes dargestellt.

Man setzt zunächst eine „mittlere Keplerbahn“ an; sie hat die Exzentrizität $e = 0,0549$ und ist um $5,145^\circ$ gegen die Ekliptik geneigt, die Umlaufzeit ist der anomalistische Monat. Die ekliptikale Länge dieses mittleren Mondes lässt sich über eine Reihenentwicklung darstellen (die ersten drei Zeilen in der Formel unten, wobei sich der letzte Term aus der Bahnneigung gegen die Ekliptik ergibt). Die Abweichungen von der mittleren Keplerbahn werden durch Addition weiterer periodischer Terme berücksichtigt; darin schlagen sich in erster Linie die wechselnden Einflüsse der Sonne nieder. Jede Störung führt so zu einem sinusförmigen Pendeln um die Position des mittleren Mondes. Von diesen Termen existieren Hunderte; man bricht dann ab, wenn eine gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Diese Verfahren beruhen auf speziellen Mondtheorien und Rechenricks, die zu Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt wurden (George William Hill, Ernst W. Brown).

Nach [2] stellt sich der zeitliche Verlauf der ekliptikal Länge λ des gestörten Mondes verkürzt folgendermaßen dar:

| | |
|---|--|
| $\lambda(\tau) \approx 218,31665^\circ + 481267,88134^\circ \cdot \tau$ $+ 6,289^\circ \cdot \sin(l(\tau)) + 0,214^\circ \cdot \sin(2l(\tau)) + 0,01^\circ \cdot \sin(3l(\tau))$ $- 0,114^\circ \cdot \sin(2F(\tau))$ $- 1,274^\circ \cdot \sin(l(\tau) - 2 \cdot D(\tau))$ $+ 0,658^\circ \cdot \sin(2 \cdot D(\tau))$ $+ \dots$ | <p>← <i>Mittlere Länge</i> des Mondes (mittlerer Winkelabstand vom Frühlingspunkt)</p> <p>← <i>Große Ungleichheit</i> („Mittelpunktgleichung“ bedingt durch die Bewegung auf der Ellipse)</p> <p>← Differenz zwischen der Länge in der Bahn selbst und dem gesuchten λ (das ekliptikal ist)</p> <p>← <i>Evektion</i> (1. Störung der großen Ungleichheit)</p> <p>← <i>Variation</i> (2. Störung der großen Ungleichheit)</p> <p>← weitere Störungsterme</p> |
|---|--|

Dabei ist

$$\tau = (\text{JD} - 2451545)/36525$$

die verstreichende Zeit, gemessen in der Anzahl der Jahrhunderte seit Beginn des Jahres 2000 (JD: Julianisches Datum);

$$l(\tau) \approx 134,96^\circ + 477198,87^\circ \cdot \tau$$

ist die „mittlere Anomalie“, darunter versteht man den Winkelabstand vom Perigäum, den der Mond hätte, wenn er sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Erde bewegte;

$$F(\tau) \approx 93,272^\circ + 483202,018^\circ \cdot \tau$$

ist der mittlere Winkelabstand des Mondes vom aufsteigenden Knoten;

$$D(\tau) \approx 297,850^\circ + 445267,112^\circ \cdot \tau$$

bezeichnet die mittlere Elongation des Mondes von der Sonne.

Die auffälligsten Schwankungen der Mondbewegung haben in der Vergangenheit besondere Namen bekommen (siehe die Bezeichnungen oben): Die *Große Ungleichheit* resultiert aus der Bewegung auf der mittleren Keplerellipse; sie war schon im Altertum bekannt, sehr lange bevor Johannes Kepler die Planetengesetze fand und Isaac Newton die Grundlage für ein Verständnis der Mondbewegung geschaffen hatte. Auch die *Evektion*, eine Störung der Großen Ungleichheit mit einer Periode von 31,8 Tagen, wurde im Altertum entdeckt (Hipparchos / Ptolemäus); sie folgt aus Geschwindigkeitsschwankungen, die sich einerseits aus Vergrößerung / Verkleinerung des Bahnradius in den Syzygien bzw. Halbmondphasen ergeben, andererseits aus der unterschiedlichen Wirksamkeit der Störbeschleunigung in Peri- und Apogäum der Mondbahn (die Amplitude der Störbeschleunigung ist proportional zum Bahnradius, siehe die Ergänzung 2). Viel später erst wurde auch die *Variation* bemerkt (Tycho Brahe um 1590); sie ergibt sich aus Beschleunigungen und anschließenden Verzögerungen jeweils zwischen Halbmond- und Voll- oder Neumondphase.

Die Bahn des Mondes um die Erde, eines der schwierigsten himmelsmechanischen Probleme, hatte schon immer die größten Gelehrten beschäftigt, angefangen mit Ptolemäus und seinen griechischen Vorgängern. In arabischen Quellen findet man Aufzeichnungen, Tycho Brahe lieferte Beiträge; Johannes Kepler, Isaac Newton, Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Pierre Simon de Laplace stellten ihre Theorien auf [3]. Zur Beschreibung der Mondbewegung wurden Verfahren entwickelt, die sich auch auf anderen Gebieten als sehr nützlich erwiesen hatten. Die modernen Reihendarstellungen – nach obigem Muster – resultieren aus Berechnungen von größter Komplexität, sie zeichnen die Mondbewegung beliebig genau nach. Schon unter Beschränkung auf die wenigen Summanden des Schemas oben erhält man akzeptable Genauigkeit; das wird im Vergleich von λ -Werten aus der nachfolgenden Excel-Tabelle mit den entsprechenden Jahrbuchwerten in Tabelle 2 des Zeitschriften-Artikels deutlich. Umgekehrt ist der Aufwand, um mittels Tabellenkalkulation aus den Zahlenkolonnen wieder die komplizierten Bewegungsmuster des Mondes herauszuschälen, nicht sehr hoch; das sollte im Artikel „Die gestörte Mondbahn“ demonstriert werden.

Ekliptikale Länge des Mondes (beschränkte Genauigkeit, obige Formeln; Winkel im Gradmaß)

| Tage | Juli- anisches Datum | Jahrhunderte seit 2000 τ | mittl. Anomalie $I(\tau)$ | Knoten- Abstand $F(\tau)$ | Elongation zur Sonne $D(\tau)$ | Mittlere Länge L_0 | $\lambda = L_0 +$ Große Un- gleichheit | plus In- klination | plus Evektion | plus Variation | λ Summe |
|---------|----------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|--|-----------------------|------------------|-------------------|--------------------|
| 1.1.08 | 2454466,5 | 0,07999 | 668,5369 | 676,1897 | 626,8023 | 193,1590 | 196,6321 | 196,5184 | 197,3694 | 197,2977 | 197,30 |
| 2.1.08 | 2454467,5 | 0,08001 | 668,7649 | 676,4206 | 627,0150 | 206,3354 | 208,6091 | 208,5035 | 209,5239 | 209,1887 | 209,19 |
| 3.1.08 | 2454468,5 | 0,08004 | 668,9929 | 676,6515 | 627,2278 | 219,5118 | 220,4878 | 220,4124 | 221,5627 | 221,0236 | 221,02 |
| 4.1.08 | 2454469,5 | 0,08007 | 669,2209 | 676,8824 | 627,4406 | 232,6881 | 232,3248 | 232,2954 | 233,5307 | 232,8840 | 232,88 |
| 5.1.08 | 2454470,5 | 0,08010 | 669,4490 | 677,1133 | 627,6533 | 245,8645 | 244,1774 | 244,2000 | 245,4725 | 244,8334 | 244,83 |
| 6.1.08 | 2454471,5 | 0,08012 | 669,6770 | 677,3442 | 627,8661 | 259,0409 | 256,1024 | 256,1725 | 257,4325 | 256,9151 | 256,92 |
| 7.1.08 | 2454472,5 | 0,08015 | 669,9050 | 677,5751 | 628,0789 | 272,2173 | 268,1554 | 268,2582 | 269,4569 | 269,1534 | 269,15 |
| 8.1.08 | 2454473,5 | 0,08018 | 670,1330 | 677,8060 | 628,2916 | 285,3937 | 280,3893 | 280,5033 | 281,5939 | 281,5585 | 281,56 |
| 9.1.08 | 2454474,5 | 0,08021 | 670,3611 | 678,0369 | 628,5044 | 298,5701 | 292,8528 | 292,9541 | 293,8943 | 294,1333 | 294,13 |
| 10.1.08 | 2454475,5 | 0,08023 | 670,5891 | 678,2678 | 628,7172 | 311,7465 | 305,5885 | 305,6559 | 306,4091 | 306,8799 | 306,88 |
| 11.1.08 | 2454476,5 | 0,08026 | 670,8171 | 678,4987 | 628,9299 | 324,9229 | 318,6303 | 318,6497 | 319,1867 | 319,8052 | 319,81 |
| 12.1.08 | 2454477,5 | 0,08029 | 671,0452 | 678,7296 | 629,1427 | 338,0993 | 331,9997 | 331,9670 | 332,2668 | 332,9228 | 332,92 |
| 13.1.08 | 2454478,5 | 0,08031 | 671,2732 | 678,9605 | 629,3555 | 351,2757 | 345,7018 | 345,6239 | 345,6749 | 346,2514 | 346,25 |
| 14.1.08 | 2454479,5 | 0,08034 | 671,5012 | 679,1914 | 629,5682 | 4,4521 | 359,7217 | 359,6148 | 359,4150 | 359,8091 | 359,81 |
| 15.1.08 | 2454480,5 | 0,08037 | 671,7292 | 679,4223 | 629,7810 | 17,6285 | 14,0217 | 13,9084 | 13,4656 | 13,6070 | 13,61 |
| 16.1.08 | 2454481,5 | 0,08040 | 671,9573 | 679,6532 | 629,9938 | 30,8049 | 28,5422 | 28,4460 | 27,7775 | 27,6410 | 27,64 |
| 17.1.08 | 2454482,5 | 0,08042 | 672,1853 | 679,8841 | 630,2066 | 43,9813 | 43,2039 | 43,1452 | 42,2768 | 41,8867 | 41,89 |
| 18.1.08 | 2454483,5 | 0,08045 | 672,4133 | 680,1150 | 630,4193 | 57,1577 | 57,9147 | 57,9056 | 56,8712 | 56,2972 | 56,30 |
| 19.1.08 | 2454484,5 | 0,08048 | 672,6413 | 680,3459 | 630,6321 | 70,3341 | 72,5777 | 72,6202 | 71,4600 | 70,8044 | 70,80 |
| 20.1.08 | 2454485,5 | 0,08051 | 672,8694 | 680,5768 | 630,8449 | 83,5105 | 87,1006 | 87,1858 | 85,9449 | 85,3246 | 85,32 |
| 21.1.08 | 2454486,5 | 0,08053 | 673,0974 | 680,8077 | 631,0576 | 96,6869 | 101,4041 | 101,5141 | 100,2407 | 99,7664 | 99,77 |
| 22.1.08 | 2454487,5 | 0,08056 | 673,3254 | 681,0386 | 631,2704 | 109,8633 | 115,4279 | 115,5397 | 114,2834 | 114,0397 | 114,04 |
| 23.1.08 | 2454488,5 | 0,08059 | 673,5535 | 681,2695 | 631,4832 | 123,0397 | 129,1344 | 129,2246 | 128,0342 | 128,0645 | 128,06 |
| 24.1.08 | 2454489,5 | 0,08062 | 673,7815 | 681,5004 | 631,6959 | 136,2161 | 142,5083 | 142,5579 | 141,4797 | 141,7787 | 141,78 |
| 25.1.08 | 2454490,5 | 0,08064 | 674,0095 | 681,7312 | 631,9087 | 149,3925 | 155,5544 | 155,5531 | 154,6290 | 155,1433 | 155,14 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Literatur

- [1] Schultz, A: Astronomie mit Tabellenkalkulation, Neunter Teil: Die gestörte Mondbahn. In: ASTRONOMIE + RAUMFAHRT im Unterricht 55 (2018), Heft 2
- [2] Montenbruck, O.: Grundlagen der Ephemeridenrechnung. Verlag Sterne und Weltraum, Heidelberg 2001, S. 95 f
- [3] Peterson, I.: Was Newton nicht wußte – Chaos im Sonnensystem. Insel Verlag, Frankfurt am Main und Leipzig 1997, Kap. 6

Die Konstruktion der Vektoren der Störbeschleunigung

von Albrecht Schultz

In **Bild I** sind Sonne, Erde und Mond in irgendeiner Konstellation festgehalten; S , M , E sind die Schwerpunkte der Himmelskörper. Erde und Mond zusammen genommen sehen wir als unregelmäßig ausgedehnten Körper an, der in seinem Schwerpunkt $S_{E,M}$ die Beschleunigung $a_{E,M} = G \cdot m_S / r_S^2$ zur Sonne hin erfährt (G ist die Gravitationskonstante, m_S die Sonnenmasse, r_S der Abstand der Punkte $S_{E,M}$ und S). $S_{E,M}$ liegt noch innerhalb der Erde, drei Viertel des Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt. Das „Massenelement“ M , der Mond in seinem Schwerpunkt gedacht, erfährt aber für sich genommen eine in Betrag und Richtung davon verschiedene Beschleunigung \vec{a}_M zur Sonne hin. Deswegen ist die Mondbewegung um die Erde gestört. \vec{a}_M hat den Betrag $G \cdot m_S / \overline{MS}^2$; über den Kosinussatz der Trigonometrie bekommen wir die Abhängigkeit vom Phasenwinkel ϑ mit hinein (**Bild I**: $\vartheta = 0^\circ$ bei Neumond, $\vartheta = 180^\circ$ bei Vollmond):

$$a_M(\vartheta) = G \cdot m_S / (r_S^2 + r_M^2 - 2r_S r_M \cdot \cos \vartheta).$$

Dabei ist r_M der Abstand der Punkte $S_{E,M}$ und M . Er wird hier als Konstante angesehen, dann kennen wir den Betrag $a_M(\vartheta)$ für jedes gegebene ϑ , d.h. an beliebigen Punkten der Mondbahn. Um die Störung der Mondbahn isoliert darzustellen, müssen wir die Beschleunigung am Punkt M relativ zum Punkt $S_{E,M}$ (die „Störbeschleunigung“) notieren, und dafür steht die Vektordifferenz $\vec{a}_M(\vartheta) - \vec{a}_{E,M}$.

Letzteres soll näher erläutert und veranschaulicht werden: Was beschrieben wurde, findet noch in einem Bezugssystem statt, das fest mit der unbeweglich gedachten Sonne verbunden ist. In dieser Sicht von außen fällt die Erde zusammen mit dem Mond quasi frei auf die Sonne zu. (In ihrer Kreisbewegung „verfehlen“ sie aber den Zentralkörper ständig.) Wir begeben uns jetzt in ein Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt $S_{E,M}$ des Systems Erde-Mond liegt; die x -Achse weist zur Sonne (**Bild II**). Beobachter im Zentrum dieses Systems fühlen sich wie die Insassen eines Raumschiffes, das antriebslos auf einer Kreisbahn um die Sonne fliegt: sie sind schwerelos, fallen ebenso schnell wie die Wände des Raumschiffes und die Gegenstände darin. Aber genau betrachtet haben die Massenpunkte im Raumschiff doch verschiedene Beschleunigungen zur Sonne hin: die Beschleunigungen auf der „Sonnenseite“ des Schiffes („untere“ Seite) sind entfernungsbedingt etwas größer, auf der abgewandten Seite („oben“) etwas kleiner als im Schwerpunkt, nach dem sich die Gesamtbewegung richtet, auch sind im Allgemeinen die Richtungen leicht verändert. Die oben und unten schwebenden Gegenstände werden deshalb langsam zur Ober- bzw. Unterseite getrieben, und lose Gegenstände an gegenüberliegenden Seitenwänden streben ein wenig zur Mitte hin. Massenpunkte P_i im Raumschiff haben also verschiedene Beschleunigungen \vec{a}_i zur Sonne hin; ein Insasse registriert nur die Beschleunigungen *relativ* zum Schwerpunkt, und das sind die Vektordifferenzen $\vec{a}_i - \vec{a}_{\text{Schwerpunkt}}$. Ebenso hat sich im frei fallenden System Erde-Mond der Schwerpunkt der Gravitation entzogen; aber am Punkt M gibt es eine Restbeschleunigung $\vec{a}_M - \vec{a}_{E,M}$, die ein Zerrn am „Massenelement“ Mond bewirkt.

Die Analogie zu den Gezeiten auf der Erde ist offensichtlich. Es liegt der in [3] behandelte Fall vor, wenn wir Bild II um-interpretieren: Die Strecke $r_M = \overline{S_{E,M}M}$ wird als Radius der Erdkugel ansehen, M als verschiebbares Massenelement auf dieser Kugel, und S als Schwerpunkt des Mondes oder der Sonne. Der Mond (die Sonne) übt auf alle Kugelteile Gravitation aus. Die der Vektordifferenz $\vec{a}_M - \vec{a}_{E,M}$ entsprechenden Beschleunigungen sind für die Verschiebungen von Wassermassen verantwortlich, die an den Küsten zu Ebbe und Flut führen. Unsere Vektordifferenz ist also eine „Gezeitenbeschleunigung“, hier nennen wir sie Störbeschleunigung. In der Himmelsmechanik taucht sie in mannigfachen Zusammenhängen auf; z.B. können die zahllosen winzigen Teilchen in den Ringsystemen von Saturn, Jupiter und Uranus aus entsprechenden Gründen nicht zu festen Monden verschmelzen.

Wir benötigen Ausdrücke für die x - und y -Komponente der Störbeschleunigung im Koordinatensystem von Bild II; sie sollen die Abhängigkeit vom Winkel ϑ beschreiben. Dafür können dieselben Formeln verwendet werden, die schon für die Gezeiten der Erde benutzt wurden [3]; die dortigen Bezeichnungen a^{Gez}_x , a^{Gez}_y werden hier durch $a^{Stör}_x$, $a^{Stör}_y$ ersetzt:

$$a^{Stör}_x = a_0 \cdot \cos \vartheta, \quad a^{Stör}_y = -\frac{a_0}{2} \cdot \sin \vartheta \quad \text{mit} \quad a_0 = \frac{2Gm_S}{r_S^3} \cdot r_M. \quad (1)$$

(Die Mondmasse in den früheren Formeln ist jetzt durch die Sonnenmasse m_S ersetzt; ferner ist der vorige Abstand Erde-Mond jetzt der Abstand Erde-Sonne (r_S), der vorige Erdradius ist jetzt der Abstand r_M .)

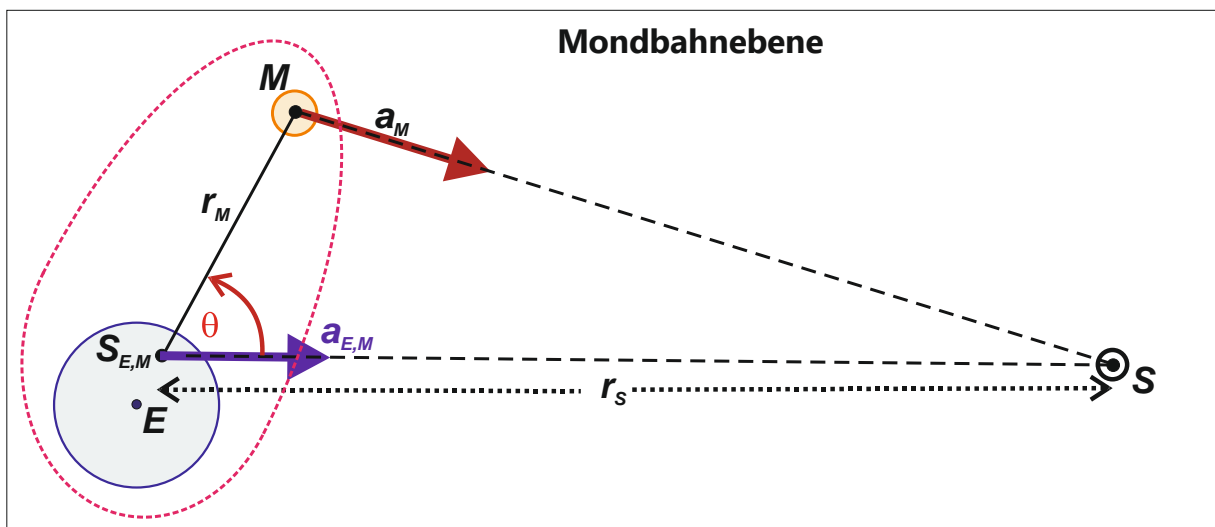


Bild I Die Sonne (S) und das Erde-Mondsystem (E , M) mit dem Schwerpunkt $S_{E,M}$ (schematisch). Der Mond erhält eine Beschleunigung, die sich in Betrag und Richtung von der des Schwerpunktes unterscheidet.

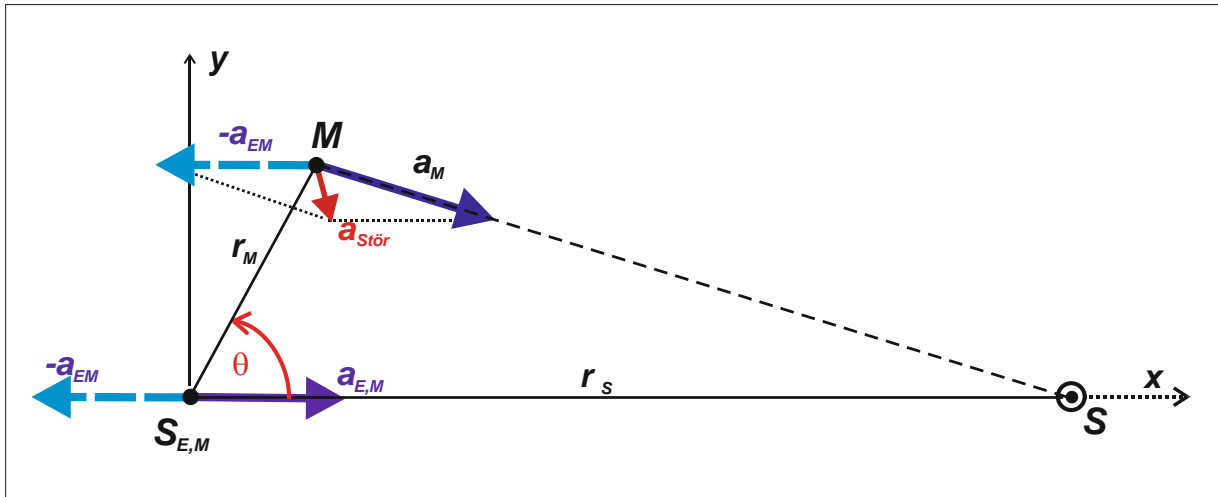


Bild II Die Störbeschleunigung auf den Mond ergibt sich als Vektordifferenz:

$$\vec{a}_{Stör} = \vec{a}_M - \vec{a}_{E,M}.$$

Die von Excel berechneten Komponenten der Störbeschleunigung sind in der **Tabelle I** wiedergegeben, und in **Diagramm I** sind die Vektoren auf die kreisförmig gedachte Mondbahn aufgesetzt. Sie geben Betrag und Richtung der Störbeschleunigung in der jeweiligen Mondposition an, vorausgesetzt, dass die Knotenlinie als x-Achse zur Sonne weist; in diesem Fall besteht auch Rotationssymmetrie bezüglich der x-Achse, das skizzierte Vektorfeld trifft für alle möglichen Inklinationwinkel zu. Wenn die Knotenlinie anders liegt, gibt es i.a. neben der tangentialen und radialen Beschleunigungskomponente auch eine dritte, zur Bahnebene senkrechte – siehe auch Bild 3 in [1]. Für den der Sonne nächsten Punkt der Mondbahn gilt

$$a^{Stör}_x = a_0, \quad a^{Stör}_y = 0,$$

auf der Gegenseite ist

$$a^{Stör}_x = -a_0, \quad a^{Stör}_y = 0$$

($\vartheta = 0^\circ$ bzw. 180°); die Vektorpfeile weisen also bei Neumond zur Sonne hin, bei Vollmond von ihr weg. Im rechten Winkel dazu (bei Halbmond, $\vartheta = 90^\circ$ bzw. 270°) sind die Vektorpfeile jeweils zum Kreismittelpunkt gerichtet und nur halb so lang ($a^{Stör}_x = 0, \quad a^{Stör}_y = \mp a_0/2$).

| Tabelle I Die Vektoren der Störbeschleunigung | | | | | | | | | |
|--|------------------------------|-------|------------------------------|------------------------------|--|----------------|--|-------|--|
| | $m_M = 7,35E+22 \text{ kg},$ | | $r_M = 379729000 \text{ m},$ | | $G = 6,67E-11 \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ | | | | |
| | $m_S = 1,99E+30 \text{ kg},$ | | $r_S = 1,496E+11 \text{ m},$ | | $a_0 = 3,01E-05 \text{ m/s}^2$ | | | | |
| ϑ | x_M | y_M | $a_x \text{ (m/s}^2\text{)}$ | $a_y \text{ (m/s}^2\text{)}$ | $a_x * 150000$ | $a_y * 150000$ | Pfeilspitzen ($x + a_x, y + a_y$) | | |
| 0 | 14,00 | 0,00 | 3,01E-05 | 0,00E+00 | 4,52 | 0,00 | 18,52 | 0,00 | |
| 0,157 | 13,83 | 2,19 | 2,97E-05 | -2,35E-06 | 4,46 | -0,35 | | | |
| 0,314 | 13,31 | 4,33 | 2,86E-05 | -4,65E-06 | 4,30 | -0,70 | 17,61 | 3,63 | |
| 0,471 | 12,47 | 6,36 | 2,68E-05 | -6,83E-06 | 4,02 | -1,03 | | | |
| 0,628 | 11,33 | 8,23 | 2,44E-05 | -8,85E-06 | 3,65 | -1,33 | 14,98 | 6,90 | |
| 0,785 | 9,90 | 9,90 | 2,13E-05 | -1,06E-05 | 3,19 | -1,60 | | | |
| 0,942 | 8,23 | 11,33 | 1,77E-05 | -1,22E-05 | 2,65 | -1,83 | 10,88 | 9,50 | |
| 1,100 | 6,36 | 12,47 | 1,37E-05 | -1,34E-05 | 2,05 | -2,01 | | | |
| 1,257 | 4,33 | 13,31 | 9,30E-06 | -1,43E-05 | 1,40 | -2,15 | 5,72 | 11,17 | |
| 1,414 | 2,19 | 13,83 | 4,71E-06 | -1,49E-05 | 0,71 | -2,23 | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

Mit diesen Sonderfällen sind die Bahnpunkte gekennzeichnet, in denen lediglich die Radialkomponente der Störbeschleunigung existiert. Für Untersuchungen der gestörten Mondbahn

ist es auch von Interesse, diejenigen Winkel ϑ zu ermitteln, für welche nur die Tangentialkomponente vorhanden ist. In solchen Bahnpunkten ist die Störbeschleunigung

$$\mathbf{a}^{Stör} = \begin{pmatrix} a_0 \cdot \cos \vartheta \\ -a_0/2 \cdot \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

ein Tangentenvektor, und das Skalarprodukt mit dem Radiusvektor muss Null ergeben, das heißt:

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \cdot \cos \vartheta \\ -a_0/2 \cdot \sin \vartheta \end{pmatrix} = 0$$

$$a_0 \cdot \cos^2 \vartheta - a_0/2 \cdot \sin^2 \vartheta = 0$$

$$\tan^2 \vartheta = 2$$

$$\vartheta = 54,7^\circ \vee \vartheta = 125,3^\circ \vee \vartheta = 234,7^\circ \vee \vartheta = 305,3^\circ.$$

Der Betrag des Tangentenvektors ist

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a_0 \cdot \cos \vartheta)^2 + (-a_0/2 \cdot \sin \vartheta)^2} \\ &= \frac{a_0}{2} \sqrt{4 \cdot \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta} = \frac{a_0}{2} \sqrt{3 \cdot \cos^2 \vartheta + 1} = \frac{a_0}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \vartheta} + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Mit } \tan^2 \vartheta = 2 \text{ ergibt sich } \frac{a_0}{2} \sqrt{2}.$$

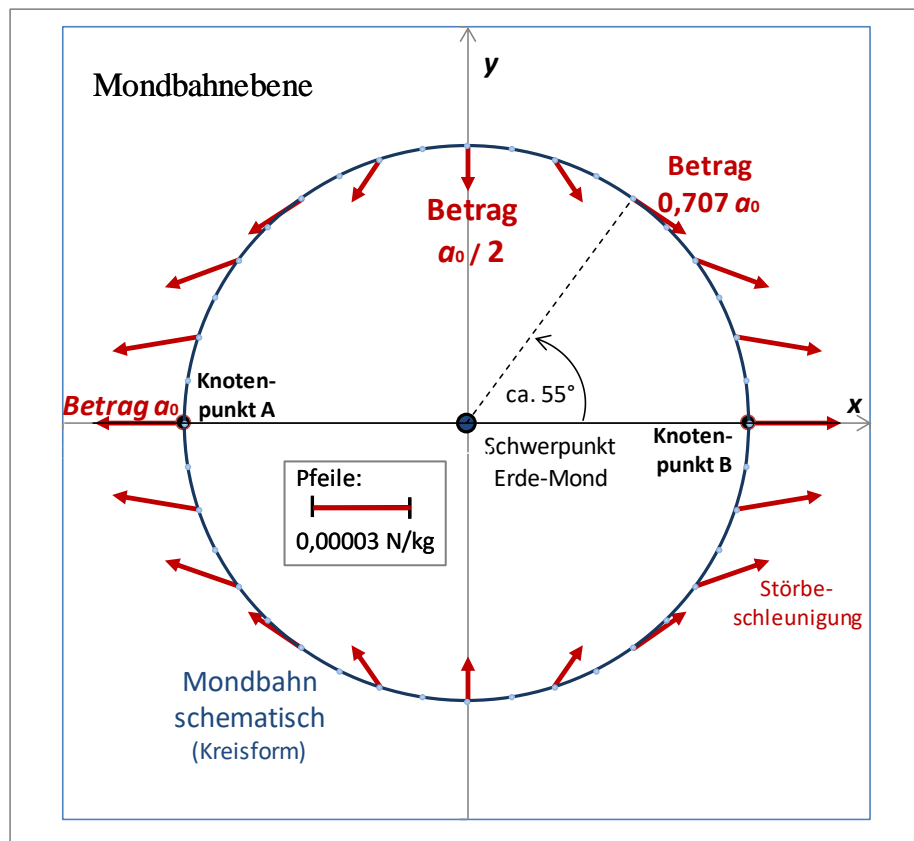


Diagramm I Störbeschleunigungen auf der kreisförmig gedachten Mondbahn für den Fall, dass sich die Knotenlinie auf der x-Achse befindet, ebenso die Sonne (weit rechts oder weit links). Die Vektorpfeile geben Betrag und Richtung in den jeweiligen Mondpositionen an, dabei denkt man sich den Ort der Sonne jeweils unverändert.

Wir vergleichen den maximalen Betrag a_0 der Störbeschleunigung mit der Beschleunigung, die die Erde auf den Mond ausübt; dazu bilden wir das Verhältnis $\frac{a_0}{G \cdot m_E / r_M^2}$ (G : Gravitationskonstante), es ergibt sich etwas mehr als 1 Prozent.

Literatur

- [1] Schultz, A: Astronomie mit Tabellenkalkulation, Neunter Teil: Die gestörte Mondbahn. In: ASTRONOMIE + RAUMFAHRT im Unterricht 55 (2018), Heft 2
- [2] Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik Band I, 11. Auflage, de Gruyter, Berlin - New York 1998, S. 165 ff
- [3] Schultz, A.: Astronomie mit Tabellenkalkulation. Achter Teil: Montag und Gezeiten. In: ASTRONOMIE + RAUMFAHRT im Unterricht 50 (2013), Heft 3-4

Die Bahnelemente *Exzentrizität* und *Große Halbachse*

Rückgriff auf Reihenentwicklung

von Albrecht Schultz

In der Ergänzung 1 zum Zeitschriftenartikel wurde eine Reihenentwicklung für die ekliptikale Länge λ des gestörten Mondes vorgestellt. Das soll nun auch für die Exzentrizität e und für die große Halbachse a geschehen. Die beiden Bahnelemente wären feste Größen, wenn der Mond ungestört seine Bahn um die Erde ziehen könnte, aber die von der Sonne ausgehenden Gezeitenkräfte machen sie variabel. Die entsprechenden Mechanismen beschreibt *F.R. Moulton* in seiner *Einführung in die Himmelsmechanik* aus dem Jahr 1927 - siehe Literaturangabe [13] des Zeitschriftenartikels.

In der mathematischen Darstellung überlagern sich einem Mittelwert, der für eine vorerst ungestörte Kepler-Bahn steht, zahlreiche periodische Terme, und in diesen schlagen sich die wechselnden Einflüsse der Störkraft nieder. Mit den Argumenten

$l(\tau) = 134,96341^\circ + 477198,86763^\circ \cdot \tau + 0,008997^\circ \cdot \tau^2$ (mittlerer Winkelabstand des Mondes vom Perigäum),

$D(\tau) \approx 297,85020^\circ + 445267,111522^\circ \cdot \tau$ (mittlerer Winkelabstand des Mondes von der Sonne) ergibt sich für die Exzentrizität

$$e = 0,055546 + 0,014216 \cdot \cos(2D - l) + 0,00851 \cdot \cos(2D - 2l) - 0,001383 \cdot \cos l \pm \dots,$$

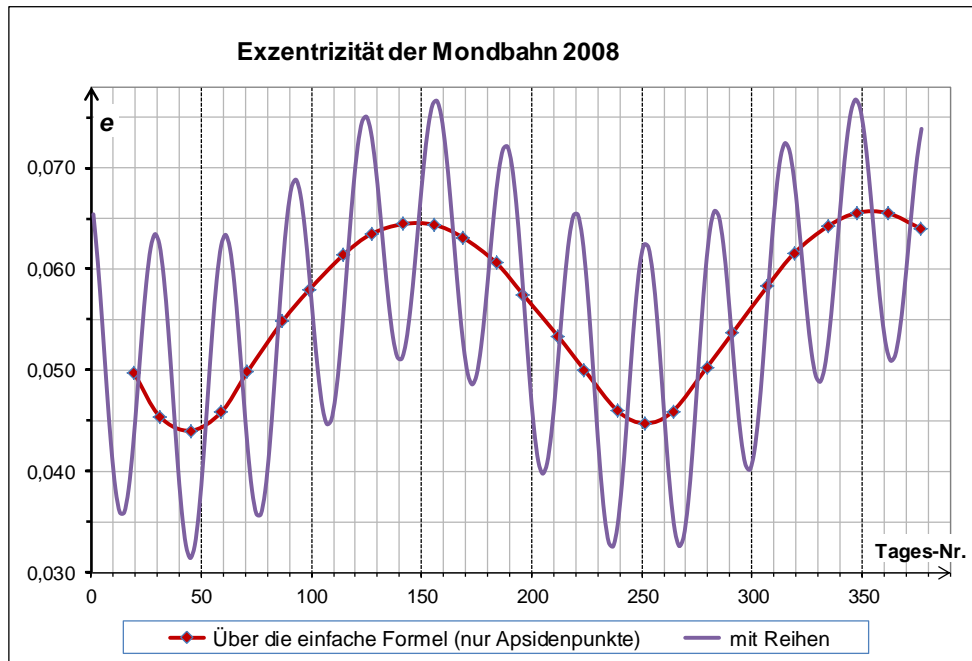
und für die große Halbachse

$$a = 383397,8 \text{ km} + 3400,4 \text{ km} \cdot \cos 2D - 635,6 \text{ km} \cdot \cos(2D - l) - 235,6 \text{ km} \cdot \cos l \pm \dots$$

Dabei ist $\tau = (\text{JD} - 2451545)/36525$ (JD: Julianisches Datum) die seit Beginn des Jahres 2000 verstrichene Zeit in Jahrhunderten (<https://de.wikipedia.org/wiki/Mondbahn> und *Montenbruck, O.: Grundlagen der Ephemeridenrechnung*, Verlag Sterne und Weltraum, Heidelberg 2001, S. 95).

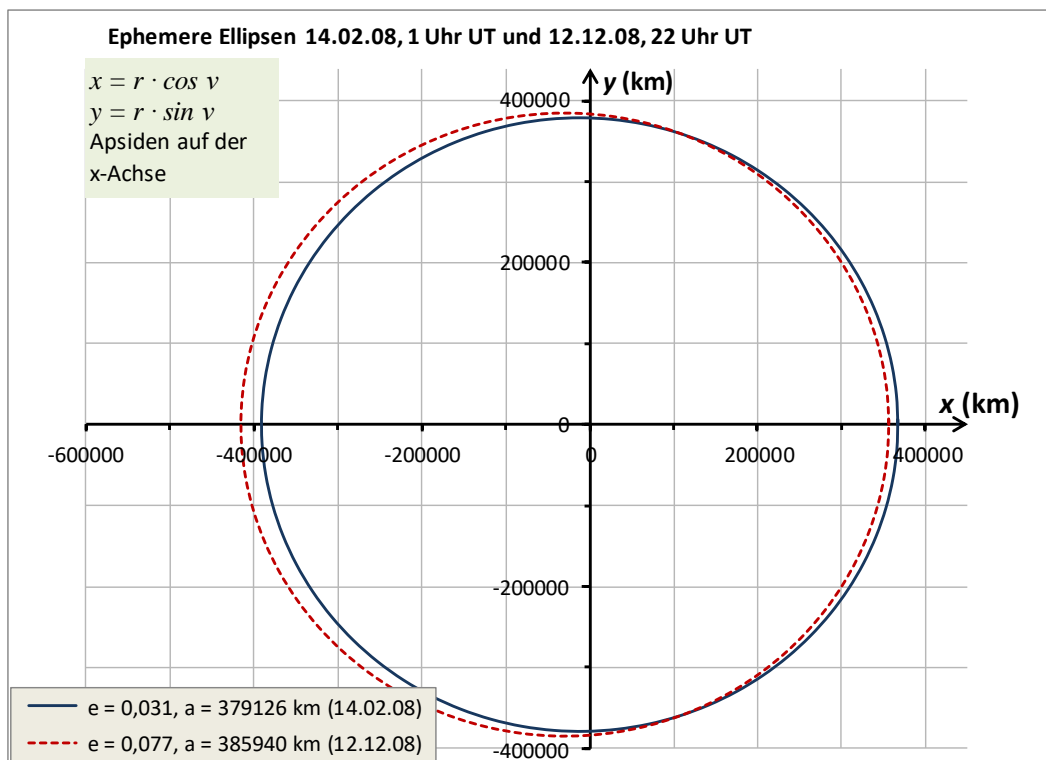
In Diagramm 3b des Zeitschriftenartikels stützt sich der Exzentrizitätsverlauf auf monatliche Mittelwerte für e . Diese sind in den Astronomischen Jahrbüchern nicht angegeben, sie wurden unter Verwendung aufeinanderfolgender Extremabstände ρ_{min} , ρ_{max} (Peri- und Apogäumsentfernungen) berechnet; methodenbedingt konnte ein feineres Schwingungsbild dort nicht hergestellt werden. Dem ist im untenstehenden Diagramm abgeholfen: das aus der Reihenentwicklung resultierende Schwingungsbild ist über das gröbere gelegt.

Der über die Jahrbuchdaten ermittelte Exzentrizitätsverlauf erweist sich als Glättung der reihenbasierten Kurve; hier lässt sich auch nachvollziehen, dass die erste Kurve die an der zweiten Kurve ablesbaren *Zuwächse* bzw. *Abnahmen* – jeweils innerhalb einzelner Perioden erzielt – nachzeichnet, ganz so wie im Zeitschriftentext dargelegt.



Die Datenpunkte der zweiten Kurve kennzeichnen die Exzentrizitäten der fiktiven ephemeren Ellipsen, von denen im Artikel des Heftes 3-4/2018 eingangs die Rede war. Diese Ellipsen lassen sich für beliebige Zeitpunkte darstellen: unter Anwendung der Reihenentwicklung wird ein bestimmtes e_0 zusammen mit dem gleichzeitigen a_0 berechnet, dann ergibt sich die zugehörige Ellipsenform über die graphische Auswertung der Polargleichung $r_0 = \frac{a_0 \cdot (1 - e_0^2)}{1 + e_0 \cdot \cos v}$ ($0 \leq v < 2\pi$).

Beispiele:



Die spezielle Lage im Raum ist dabei nicht berücksichtigt.

Errata:

Heft 2 / 2018

Seite 10, 3. Spalte: $n + \frac{\lambda_{Kn} - \lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$

ist der berichtigte Term für die Zeitpunkte der Knotendurchgänge.

Heft 3-4 / 2018

Seite 21, 1. Spalte, Zeile 27: ... ein ρ_{max} und ein ρ_{min} ...

Seite 23, Unterschrift zu Diagramm 3a: Apsidenentfernungen 2008 (ρ_{min} und ρ_{max})

Seite 25, mittlere Spalte:

$$x \cdot 29,53059 d = y \cdot 27,55455 d \text{ oder}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2953059}{2755455} = \frac{984\,353}{918\,485} \text{ (ursprünglich falsche Einsetzung !)}$$