Quanteneffekte und Quantenparadoxa
Übungsblatt 4

Vorlesung: Prof. O. Gühne, Dr. M. Kleinmann
Übungen: T. Kraft

Ausgabe: Montag, 05.11.2018
Abgabe: Montag, 12.11.2018

---

1. CHSH II

Betrachten Sie den CHSH-Operator des letzten Blatts (diesmal in der richtigen Form),

$$\mathcal{B} = A_1 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_2 + A_2 \otimes B_1 - A_2 \otimes B_2.$$

Diesmal sind aber $A_1 = B_1 = \sigma_x$ und $A_2 = B_2 = \sigma_y$. Können Sie immer noch einen Zustand finden, sodass der maximale Wert von $\langle B \rangle = 2\sqrt{2}$ erreicht wird?

2. Das Argument von Greenberger, Horne und Zeilinger (GHZ)

Ein einfaches Argument gegen lokal-realistische Modelle ist das GHZ-Argument. Betrachten Sie dazu für den GHZ-Zustand für drei Systeme,

$$|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)$$

und die Observablen

$$\begin{aligned} M_1 &= \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \\ M_2 &= \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \\ M_3 &= \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y \\ M_4 &= \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie zunächst die Erwartungswerte der Observablen M_2, M_3 und M_4 für den GHZ-Zustand.

(b) Nehmen Sie an, dass die Observablen σ_x und σ_y jeweils vorherbestimmte Werte ± 1 haben, ähnlich wie im Beweis des Satzes von Bell. Welche Werte sind nun möglich wenn in allen Systemen σ_x gemessen wird? Was folgt aus dieser (kontrafaktischen) Argumentation für $\langle M_1 \rangle$?

(c) Berechnen Sie nun den Erwartungswert von M_1 in der Quantenmechanik.

(d) Aus diesen vier Observablen kann man nun den Operator

$$\mathcal{B} = M_2 + M_3 + M_4 - M_1$$

konstruieren. Für lokal Modelle mit versteckten Variablen gilt $\langle \mathcal{B} \rangle \leq 2$, warum?

(e) Was ist das algebraische Maximum? Was fällt Ihnen auf?

3. Teleportation

Sie haben in der Vorlesung bereits Verschränkung diskutiert. Man kann sich nun fragen, ob es Situationen gibt, bei denen ein verschränkter Zustand praktische Vorteile hat. Ein Beispiel dafür ist die Quantenteleportation. Dabei sollte man zunächst bemerken, dass es dabei nicht um die Teleportation von Materie geht sondern um die Übertragung von Zuständen. Gegeben sei also ein Zustand $|\varphi\rangle_{A_1} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ welcher sich im Labor A befindet. Das Ziel ist es, den Zustand $|\varphi\rangle$ zu einem möglicherweise weit entfernten Labor B zu senden indem man aber nur klassische Information überträgt.

Wir nehmen dazu an, dass sich die beiden Labore A und B denn Bell-Zustand $|\psi^-\rangle_{A_2 B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ teilen.

(a) Berechnen Sie zunächst den Gesamtzustand im Hilbertraum $\mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{A_2} \otimes \mathcal{H}_B$.

Im Labor A wird nun eine Messung in der so genannten Bell-Basis durchgeführt. Dies ist eine Messung mit vier möglichen Ausgängen und die Eigenvektoren der Observable entsprechen den Bell-Zuständen $|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ und $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$.

(b) Überzeugen Sie sich, dass die Bell-Zustände eine Orthonormalbasis für $\mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_B$ bilden. bilden.

(c) Bestimmen Sie den Zustand den man im Labor B erhält nachdem im Labor A eine Bell-Messung auf dem System $\mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{A_2}$ durchgeführt wurde, in Abhängigkeit vom Ausgang der Messung.

(d) Wie erhält man nun den ursprünglichen Zustand $|\varphi\rangle$ im Labor B?