Theoretische Physik: Quantenmechanik
Anwesenheitsaufgaben

Vorlesung: Otfried Gühne   Übungen: Andreas Ketterer, Christina Ritz, Timo Simnacher
Vorlesung: Di. 10-12 (B030) und Fr. 14-16 (D115)
Übungen: Di. 8:00-10:00 (B030) und Di. 12:00-14:00 (B030)

Zu bearbeiten am 17.10.2017

1. Eigenwerte und Eigenvektoren

(a) Berechne die Spur und die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Berechne die Eigenwerte der gegebenen Matrix.
(c) Berechne die Eigenvektoren der gegebenen Matrix.
(d) Normalisiere die Eigenvektoren und berechne ihr Skalarprodukt.
(e) Wie ist der Zusammenhang zwischen der Spur, der Determinante und den Eigenwerten der Matrix.
Tipp: Berechne die Spur, Determinante und die Eigenwerte der allgemeine Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, und vergleiche die Ergebnisse.

2. Hermitesche Matrizen

Die Tatsache, dass die Matrix in Aufgabe 1 reelle Eigenwerten und zugehörige orthogonale Eigenvektoren besitzt ist auf ihre hermitizität zurückzuführen. Generell wird eine $n \times n$ Matrix M hermitesch genannt wenn $< M\vec{a}, \vec{b} >=< \vec{a}, M\vec{b} >$, für alle beliebigen paare von Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$. Wobei das Skalarprodukt durch $< \vec{a}, \vec{b} >= \sum_{i=1}^n a_i^*(\vec{b})_i$, und die Matrix-Vektor multiplikation durch $M\vec{b} = \sum_{j=1}^n M_{ij} b_j$ definiert sind.

Allgemeiner, die adjungierte Matrix $N^\dagger$ zu der $n \times n$ matrix N ist definiert durch $< N^\dagger \vec{a}, \vec{b} >=< \vec{a}, N\vec{b} >$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^n$. Eine hermitesche Matrix ist dann ein Spezialfall einer adjungierten Matrix fr die gilt $M = M^\dagger$.

(a) Zeige dass die Eigenwerte einer hermiteschen $n \times n$ Matrix M reell sind und dass die zugehörigen Eigenvektoren zu verschiedenen nicht verschwindenden Eigenwerten orthogonal sind. (Tipp: Benutze die Eigenvektoren von M in der Definition der Hermizität und die Eigenschaften des komplexen Skalarprodukts).
(b) Zeige dass die Matrixeintrge n_{ij} der $n \times n$ Matrix N und die Einträge $\tilde{n}_{ij}$ der adjungierten Matrix $N^\dagger$ die folgende Relation erfüllen $\tilde{n}_{ij} = n_{ji}^*$, wobei n_{ji}^* die komplexe konjugation der der Eintrge n_{ji} bezeichnet.

3. Positiv Semidefinite Matrizen

Eine $n \times n$ Matrix A is positiv semidefinit (kurz: positiv) wenn $< \vec{a}, A\vec{a} > \geq 0$, für alle $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$. Gegeben eine positive Matrix A ($A \geq 0$) dann existiert auch eine positive matrix B die $B^2 = A$

erfüllt. Wir bezeichnen $B = A^{1/2} = \sqrt{A}$.
(a) Zeige dass eine positive Matrix A genau dann positiv ist wenn sie hermitesch ist $(A = A^\dagger)$ und ihre Eigenwerte positive sind $\lambda_i \geq 0$. (Tipp: Um die Hermizität zu zeigen, teile die positive matrix in einen Real- und Imaginärteil auf und zeige, dass letzterer verschwindet. Für die Rückrichtung beachte dass eine hermitesche Matrix immer durch eine unitäre Transformation diagonalisiert werden kann.)
(b) Finde ein Beispiel einer Matrix die positive Eigenwerte hat aber nicht hermitesch ist.
(c) Verifiziere dass die folgende Matrix positiv ist und berechne ihre Quadratwurzel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Bestimme zuerst die Eigenwerte der Matrix A, und beachte dass A und B diagonal in der selben Basis sind.