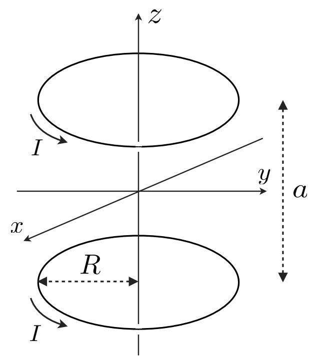
Theoretische Physik: Elektrodynamik
Übungsblatt 8

Vorlesung: Matthias Kleinmann, Übungen: Andreas Ketterer, Timo Simnacher, Fabian Bernards
Vorlesung: Di. 10–12 (D308) und Fr. 10–12 (D308), Übungen: Fr. 8–10 (D115, B030)

Zu bearbeiten bis 12.06.2018

1. Helmholtz-Spulen (1+3+3 Punkte)

Zwei parallele kreisförmige Drähte mit Radius R und Abstand a werden jeweils in der auf der Abbildung angezeigten Richtung von einem Strom der Stärke I durchflossen. Nehmen Sie an, dass die Drähte einen idealisierten unendlich dünnen Durchmesser haben.



(i) Geben Sie die Stomdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ der Anordnung an.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ auf der z-Achse.

(iii) In welchem Abstand a müssen die Leiterschleifen angebracht werden, damit das Magnetfeld zwischen ihnen möglichst homogen ist? Man bezeichnet die entsprechende Anordnung als Helmholtz-Spulen.
Tipp: Entwickeln Sie $\boldsymbol{B}$ in einer Taylorreihe um $z = 0$.

2. Vektorpotenzial und Coulomb-Eichung (3+3 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass das durch $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ definierte Vektorpotenzial der Coulomb-Eichung genügt. Tipp: Partielle Integration.

(ii) Zeigen Sie, dass für zwei Stromverteilungen $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r})$ und deren zugehörigen Vektorpotenziale $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})$ folgende Identität gilt:

$$\int \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r}_1) \cdot \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}_1) d^3r_1 = \int \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{r}_2) \cdot \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}_2) d^3r_2. \tag{1}$$

3. Magnetfeld einer rotierenden Kugel (1+3+2 Punkte)

Eine homogen mit der Ladungsdichte ρ geladene Kugel rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{n}}$, mit einem im Zentrum der Kugel liegenden Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{n}}$.

(i) Geben Sie die Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ der Kugel an und überprüfen Sie die Kontinuitätsgleichung.

(ii) Berechnen Sie das Vektorpotenzial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ für Punkte $\boldsymbol{r}$ außerhalb der Kugel ($r > R$).
Tipp: Führen Sie zuerst in jeder Komponente von $\boldsymbol{r}'$ die Integration über die entsprechenden Winkelkoordinaten aus und benutzen Sie

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}} dx = \frac{2}{3}\frac{r'}{r^2}, \quad \text{für} \quad r > r'. \tag{2}$$

(iii) Wie lautet das magnetischen Dipolmoment $\boldsymbol{m}$ der Kugel und das entsprechende Vektorpotenzial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$? Was gilt für die höheren magnetischen Multipolmomente?